**Описание пространственно-временной структуры частотно-модулированного импульса методами волновой теории катастроф**

А.С. Крюковский, Ю.И. Скворцова

*Негосударственное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Российский новый университет», Москва, ул. Радио, 22, Kryukovsky@rambler.ru*

*Рассмотрены условия образования краевых катастроф в пространстве-времени при условии распространения электромагнитной волны в плазменном слое с сильной частотной дисперсией. Приведена классификация краевых катастроф для этого случая, необходимые и достаточные условия их образования. Особое внимание уделено краевой катастрофе* $F_4$*, а также особенностям* $B_{N+1}$ и $C_{N+1}$.

*The conditions of formation of edge catastrophes in space – time under condition of electromagnetic wave propagation in a plasma layer with strong frequency dispersion are considered. The classification of edge catastrophes for this case and necessary and a sufficient condition of their formation is given. The special attention is given to edge catastrophe* $F_4$*, and also singularities* $B_{N+1}$ *and* $C_{N+1}$.

Доклад посвящен применению теории краевых катастроф для описания распространения электромагнитного излучения в нестационарном случае. Рассмотрим условия образования простых краевых особенностей: $B_{N+1}$, $C_{N+1}$, $F_4$ при распространении частотно-модулированного радиоимпульса в однородной диспергирующей среде (холодной плазме с плазменной частотой $\omega_p$). Будем считать, что источник излучения помещен в начало координат. Тогда решение задачи может быть представлено в виде интеграла (см., например, [1 – 3])

$$U\left(\vec{r},t\right)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}K\left(\omega\right)U_o(\eta)\exp\left[i\omega\left(t-\eta-\frac{R}{c}\left(\varepsilon\left(\omega\right)\right)^{1/2}\right)\right]d\omega\, d\eta\ , \tag{1}$$

где $\vec{r}=\left(X,\ Y,\ Z\right)$; $R=\left|\vec{r}\right|$;

$c$ – скорость света;

$\varepsilon\left(\omega\right)=1-\left(\omega_p/\omega\right)^2$ – эффективная диэлектрическая проницаемость;

$$U\left(\vec{r},t\right)\Big|_{R=R_o,\,t=\eta}=U_o(\eta)=\frac{1}{R_o}B(\eta)\exp\left\{i\omega\left(\eta+f(\eta)\right)\right\};\quad R_o\to 0\ ,\ \omega_o>>\omega_p\ ; \tag{2}$$

а

$$K\left(\omega\right)=\left|K\left(\omega\right)\right|\exp\left\{i\psi\left(\omega\right)\right\} \tag{3}$$

частотная характеристика фильтра приемного устройства. Для простоты рассмотрим полубесконечный радиосигнал. Тогда

$$B(\eta)=\chi(\eta)A(\eta),\qquad \chi(\eta)=1\ ,\ \eta\ \geq\ 0\ ;\qquad \chi(\eta)=0\ ,\ \eta<0\ ; \tag{4}$$

где $A(\eta)$ – огибающая радиосигнала;

$\omega_o$ – несущая частота;

$f(\eta)$ – гладкая функция, характеризующая частотную модуляцию радиосигнала.

Критическими точками интеграла (1) являются седловые точки фазовой функции, а также, в силу (4), её сужения. Фазовая функция, определяющая совместно со своими сужениями лучевые семейства, описывающие распространение радиосигнала в пространстве-времени (ПВ), имеет вид:

$$\Phi\left(\eta,\omega,\vec{r},t\right)=\psi\left(\omega\right)+\omega\left(t-\eta-\frac{R}{c}\left(\varepsilon\left(\omega\right)\right)^{1/2}\right)+\omega_o\left(\eta+f\left(\eta\right)\right). \qquad (5)$$

ПВ геометрооптических (ГО) семейство лучей определяется системой уравнений:

$$\partial\Phi/\partial\eta=\Phi_1=-\omega+\omega_o+\omega_o f_1\left(\eta\right)=0\ , \qquad (6)$$

$$\partial\Phi/\partial\omega=\Phi_2=t-\eta-\frac{R}{c}\left(\varepsilon\left(\omega\right)\right)^{-1/2}+\psi_1\left(\omega\right)=0\ , \qquad (7)$$

где $\psi_j=\partial\psi/\partial\omega_j$,

$f_j=\partial f/\partial\eta_j$.

Функция $f\left(\eta\right)$ с физической точки зрения характеризует компрессию и декомпрессию радиосигнала, а с точки зрения теории катастроф она ответственна за ПВ каустическую фокусировку ГО лучей. Выпишем вторые производные фазовой функции $\Phi$:

$$\partial^2\Phi/\partial\eta^2=\Phi_{11}=\omega_o f_2\left(\eta\right)=0\ , \qquad (8)$$

$$\partial^2\Phi/\partial\eta\,\partial\omega=\Phi_{12}=-1\neq 0\ , \qquad (9)$$

$$\partial^2\Phi/\partial\omega^2=\Phi_{22}=\frac{R}{c}\frac{\omega_p^2}{\omega^3}\left(\varepsilon\left(\omega\right)\right)^{-3/2}+\psi_2\left(\omega\right)=0\ . \qquad (10)$$

$$\Phi_{1^k2^n}=0,\ \ n>1,\ \ k\geq 1;\qquad \Phi_{1^n}=\omega_o f_n\left(\eta\right),\ \ n\geq 2\ . \qquad (11)$$

Из (9) следует, что максимальный коранг матрицы Гесса вторых производных функции $\Phi$ равен 1, и поэтому в данной задаче возможны только одномерные каспоидные ($\Sigma=A_N$) фокусировки ПВ ГО лучей [2]. Если $f$ зависит от $\eta$ линейно, а $\psi=0$, фокусировки ПВ ГО лучей не возникает. Если

$$f\left(\eta\right)=\frac{1}{2}a\eta^2,\qquad \psi=0\ ,$$

то положение каустики $R_c$, $t_c$ как функции параметра $\eta$ определяются равенствами:

$$R_c=\frac{c}{a}\left(\varepsilon_c\right)^{3/2}\frac{\omega_c^3}{\omega_o\omega_p^2};\qquad t_c=\eta+\frac{R_c}{c}\left(\varepsilon_c\right)^{-1/2};\qquad \varepsilon_c=\varepsilon\left(\omega_c\right);\qquad \omega_c=\omega_o\left(1+a\eta\right).$$

Гладкая каустика ПВ ГО лучей в различных работах (см., например, в [4–8]). На рис.1 показаны ПВ ГО лучи и каустика с краем (толстая линия). Особенность соответствует катастрофе $B_3$. ПВ краевые лучи на рис. 1 не показаны.

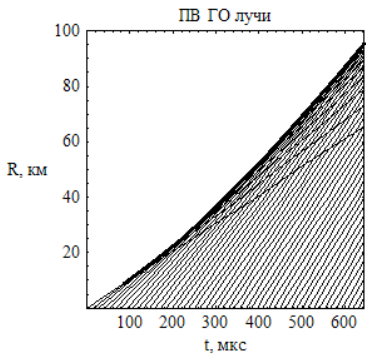


**Рис. 1.**

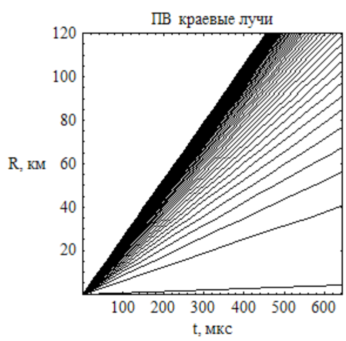


**Рис.2.**

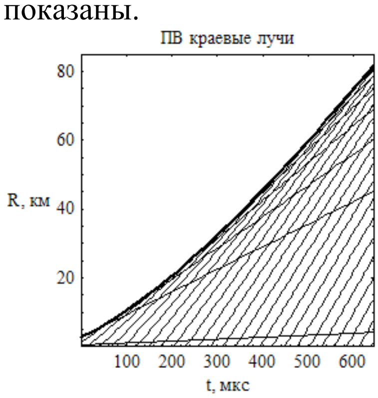


**Рис.3.**

$\omega_0=2\pi f_0$, $f_0=13{,}5$ МГц, $\omega_p=2\pi f_p$, $f_p\approx 12{,}7$ МГц,
$a$=1500 $c^{-1}$ – рис.1; $a$=0 – рис.2; $a$= –1,4 $10^{-11}$ $c^2$ – рис.3.

Рассматривая ПВ фокусировку ГО лучей, мы игнорировали вклад ПВ краевых лучей (см., например, [5, 7, 9]), порождаемых начальной точкой полубесконечного радиоимпульса. Это возможно либо, когда $B(\eta)$ плавная гладкая функция и краевые лучи отсутствуют, либо, с некоторой степенью точности, вдали от границы "свет-тень" ПВ ГО лучей, поскольку вклад краевых лучей обычно существенно меньше вклада ГО лучей. Семейство краевых лучей определяется из сужения функции $\Phi$ на границу $\eta = 0$ (то есть на начало радиоимпульса):

$$\partial\Phi\Big|_{\eta=0} / \partial\omega = t - \frac{R}{c\sqrt{\varepsilon}} + \psi_1 = 0 \ .$$

Очевидно, что при $\psi_2(\omega) = 0$ краевые лучи не фокусируются ($\Sigma_E = \mathrm{A}_1$). Равномерный учет вклада краевых лучей был рассмотрен, например, в [10, 11]. В терминах волновой теории катастроф возникающие особенности в окрестности границы "свет-тень" принадлежат серии $\mathrm{B}_{N+1} = (\mathrm{A}_N, \mathrm{A}_1)$, и поэтому равномерная асимптотика выражается по формуле:

$$U(\vec{r},t) = e^{i\theta}\left\{(l_1)_g I^{\mathrm{B}_{N+1}}(\vec{\lambda}) + \sum_{k=2}^{N}(l_k)_g\left(\frac{\partial I^{\mathrm{B}_{N+1}}}{\partial\lambda_{k-1}}\right) + (l_1)_E\right\} .$$

Здесь и ниже $\theta$ – фаза бегущей волны, $(l_j)_g$ и $(l_j)_E$ ГО и краевые коэффициенты асимптотического разложения, $\lambda_j$ – коэффициенты универсальной деформации, а

$$I^{\mathrm{B}_{N+1}}(\lambda_1,\dots,\lambda_N) = \int_0^{+\infty}\exp\left\{i\left(z^{N+1} + \lambda_N z^N + \dots + \lambda_1 z\right)\right\}dz$$

специальная функция (СВК) краевой волновой катастрофы $\mathrm{B}_{N+1}$.

Если теперь наоборот частотная модуляция отсутствует $(f(\eta) = 0)$, а $\psi(\omega)$ – фазовая характеристика фильтра не равна нулю, то может возникнуть фокусировка краевых лучей каспоидной серии, а поскольку ПВ ГО лучи не фокусируются, краевая особенность будет типа $\mathrm{C}_{N+1} = (\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_N)$. В частности, если $\psi(\omega) = \frac{1}{2}a(\omega-\omega_o)^2$, уравнение каустики в параметрической форме (параметр $\omega$) имеет вид [2]:

$$R = -ca\frac{\omega^3}{\omega_p^2}(\varepsilon)^{3/2}, \quad \omega_p < \omega < +\infty, \quad \omega_p < \omega_o; \quad t = -a\left(\omega - \omega_o + \varepsilon\frac{\omega^3}{\omega_p^2}\right), \quad a < 0 .$$

ПВ краевые лучи в отсутствии влияния фильтра приемного устройства показаны на рис.2. Видно, что все лучи выходят из точки, соответствующей началу радиоимпульса и не образуют каустики. На рис. 3 показаны лучи и их огибающая (каустика) в случае, когда фазовая характеристика фильтра не равна нулю. ПВ ГО на этих рисунках не показаны. Такой тип фокусировки является результатом взаимодействия сигнала с фильтром.

В работе [10] (см. также [2, 12]) была построена равномерная асимптотика для этого случая:

$$U(\vec{r},t) = e^{i\theta}\left\{(l_1)_g I^{\mathrm{C}_{N+1}}(\lambda_1\dots\lambda_N) + (l_1)_E I^{\mathrm{A}_N}(\lambda_1,\dots,\lambda_{N-1}) + \sum_{k=1}^{N-1}(l_k)_E\frac{\partial I^{\mathrm{A}_N}}{\partial\lambda_k}\right\},$$

где:

$$I^{\mathrm{C}_{N+1}}(\lambda_1,\dots,\lambda_N) = \int_0^{+\infty}dz\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left\{i\left(zx + x^{N+1} + \lambda_N z + \lambda_{N-1}x^{N-1} + \dots + \lambda_1 x\right)\right\}dx$$

СВК краевой волновой катастрофы $\mathrm{C}_{N+1}$, а

$$I^{A_{N+1}}(\lambda_1,\dots,\lambda_{N-1}) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{ i\left( x^{N+1} + \lambda_{N-1}x^{N-1} + \dots + \lambda_1 x \right) \right\} dx$$

специальная функция сужения, то есть СВК основной волновой катастрофы $A_{N+1}$.

Пусть теперь одновременно и $f(\eta) \neq 0$ и $\psi(\omega) \neq 0$. Тогда могут возникнуть каустики и их особенности как ПВ ГО лучей, так и краевых лучей. Положение каустики ПВ ГО лучей в пространстве $R^3 \times T$ определяется системой из трех уравнений с двумя параметрами $\eta$ и $\omega$ : (6) (7) и

$$\omega_o f_2(\eta)\left( \psi_2(\omega) + \frac{R}{c}\frac{\omega_p^2}{\omega^3}\left(\varepsilon(\omega)\right)^{-3/2} \right) = 1, \qquad (12)$$

а каустика ПВ краевых лучей системой из двух уравнений с одним параметром $\omega$ :

$$\psi_2(\omega) + \frac{R}{c}\frac{\omega_p^2}{\omega^3}\left(\varepsilon(\omega)\right)^{-3/2} = 0; \qquad t = \eta + \frac{R}{c}\left(\varepsilon(\omega)\right)^{-1/2} - \psi_1(\omega) \ . \qquad (13)$$

Из формул (6–7), (12–13) нетрудно установить, что каустики краевых лучей никогда не пересекаются с каустикой ГО лучей. Поэтому особые центральные сечения краевых катастроф (помимо $B_{N+1}$ и $C_{N+1}$) в данной задаче не образуются. Однако образуются сечения каустических структур катастроф типа $\Sigma = (A_{N_g}, A_{N_E})$ с такими $N_g$ и $N_E$, которые допустимы в соответствии с классификацией краевых катастроф (см. таблицы 1 и 2, а также [12, 13]). В таблицах 1-2 введены обозначения: $N = N_g + N_E$, – кратность особенности, $L$ –- коразмерность особенности, $M$ – модальность катастрофы, $a$ – функциональный модуль.

Таблица 1

| № | $\Sigma$ | $\Sigma_g$ | $\Sigma_E$ | Особый росток $\varphi_0^\Sigma$ | $N$ | $L$ | $M$ | $\bar{æ}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $B_2$ | $A_1$ | $A_1$ | $\pm z^2$ | 2 | 2 | 0 | 1 |
| 2 | $C_2$ | | | $xz \pm x^2$ | | | | 2 |
| 3 | $B_{N+1}$ | $A_N$ | $A_1$ | $\pm z^{N+1}$ | $N$+1 | $N$ | 0 | 1 |
| 4 | $C_{N+1}$ | $A_1$ | $A_N$ | $xz \pm x^{N+1}$ | $N$+1 | $N$ | 0 | 2 |
| 5 | $F_4$ | $A_2$ | $A_2$ | $\pm z^2 \pm x^3$ | 4 | 3 | 0 | 2 |
| 6 | $K_{4,2}$ | $A_3$ | $A_3$ | $z^2 + ax^2z \pm x^4$ | 6 | 4 | 1 | 2 |
| 7 | $K^{\#}_{1,2N-3}$ | $A_{2N}$ | $A_3$ | $\left(z + x^2\right)^2 + axz^N;\ N \geq 2$ | 2$N$+3 | 2$N$+1 | 1 | 2 |
| 8 | $K^{\#}_{1,2N-4}$ | $A_{2N-1}$ | $A_3$ | $\left(z + x^2\right)^2 + az^N;\ N \geq 3$ | 2$N$+2 | 2$N$ | 1 | 2 |
| 9 | $K_{N,2}$ | $A_3$ | $A_{N-1}$ | $az^2 + zx^2 \pm x^N;\ N \geq 5$ | $N$+2 | $N$ | 1 | 2 |
| 10 | $K^{**}_8$ | $A_4$ | $A_4$ | $x^5 + z + azx^3$ | 8 | 6 | 1 | 2 |

Таблица 2

| № | Σ | Возмущения: $\varphi_1^{\Sigma}, \ldots, \varphi_L^{\Sigma}$ | Ограничения на функциональный модуль $a$ |
|---|---|---|---|
| 1 | $B_2$ | $z$ | — |
| 2 | $C_2$ | $x(z)$ | — |
| 3 | $B_{N+1}$ | $z, \ldots, z^N$ | — |
| 4 | $C_{N+1}$ | $x, \ldots, x^N \ (x, \ldots, x^{N-1}, z)$ | — |
| 5 | $F_4$ | $x, z, xz$ | — |
| 6 | $K_{4,2}$ | $x, x^2, z, xz$ | $a^2 \neq \pm 4$ |
| 7 | $K^{\#}_{1,2N-3}$ | $z, \ldots, z^N, xz^0, \ldots, xz^{N-1}, x^2$ | $a \neq 0$ |
| 8 | $K^{\#}_{1,2N-4}$ | $z, \ldots, z^{N-1}, xz^0, \ldots, xz^{N-1}, x^2$ | $a \neq 0$ |
| 9 | $K_{N,2}$ | $xz, x, \ldots, x^{N-2}, z$ | $a \neq 0$ |
| 10 | $K^{**}_8$ | $x, x^2, x^3, z, zx, zx^2$ | — |

В более сложных случаях положения центров краевых катастроф можно определить, пользуясь необходимыми и достаточными условиями, сформулированными в таблице 3 [12–16].

Таблица 3

| Σ | $\Sigma_g$, $\Sigma_E$ | $\bar{æ}$ | Необходимые и достаточные условия<br>Общее условие: $\Phi_1 = \Phi_2 = \Phi_3 = 0$ |
|---|---|---|---|
| $B_{N+1}$ | $A_N \quad A_1$ | 1 | $\Phi_{1^k} = 0$, $k = 1,\ldots, N$; $\Phi_{1^{N+1}} \neq 0$ |
| $C_{N+1}$ | $A_1 \quad A_N$ | 2 | $\Phi_{2^k} = 0$, $k = 1,\ldots, N$; $\Phi_{2^{N+1}} \neq 0$, $\Phi_{12} \neq 0$ |
| $F_4$ | $A_2 \quad A_2$ | 2 | $\Phi_{12} = \Phi_{22} = 0$; $\Phi_{11} \neq 0$; $\Phi_{222} \neq 0$ |
| $K_{4,2}$ | $A_3 \quad A_3$ | 2 | $\Phi_{2222} \neq 0$; $\Phi_{11} \neq 0$<br>$\Phi_{222} = \Phi_{22} = \Phi_{12} = 0$;<br>$\Phi_{11}\Phi_{2222} \neq 3\Phi^2_{122}$ |
| $K_{N,2}$ | $A_3 \quad A_{N-1}$ | 2 | $\Phi_{2^k} = 0$, $k = 1,\ldots, N-1$; $\Phi_{2^N} \neq 0$<br>$\Phi_{11} \neq 0$; $\Phi_{12} = 0$; $\Phi_{122} \neq 0$; $N \geq 5$ |
| $K^{\#}_{1,1}$ | $A_4 \quad A_3$ | 2 | $\Phi_{22} = \Phi_{12} = \Phi_{222} = 0$; $\Phi_{2222} \neq 0$; $\Phi_{11} \neq 0$<br>$\Phi_{11}\Phi_{2222} = 3\Phi^2_{122}$;<br>$\Phi^2_{11}\Phi_{22222} \neq 10\Phi_{11}\Phi_{122}\Phi_{1222} - 15\Phi_{112}(\Phi_{122})^2$ |
| $K^{\#}_{1,2}$ | $A_5 \quad A_3$ | 2 | $\Phi_{22} = \Phi_{12} = \Phi_{222} = 0$; $\Phi_{2222} \neq 0$; $\Phi_{11} \neq 0$<br>$\Phi_{11}\Phi_{2222} = 3\Phi^2_{122}$;<br>$\Phi^2_{11}\Phi_{22222} = 10\Phi_{11}\Phi_{122}\Phi_{1222} - 15\Phi_{112}(\Phi_{122})^2$;<br>$\Phi^3_{11}\Phi_{222222} \neq 15\Phi^2_{11}\Phi_{12222}\Phi_{122} + 15\Phi_{111}\Phi^3_{122} -$<br>$- 45\Phi_{11}\Phi_{1122}\Phi^2_{122} + 10[\Phi_{11}\Phi_{1222} - 3\Phi_{112}\Phi_{122}]^2$ |
| $K_8$ | $A_4 \quad A_4$ | 2 | $\Phi_{22} = \Phi_{12} = \Phi_{222} = \Phi_{122} = \Phi_{2222} = 0$; $\Phi_{22222}\Phi_{11} \neq 0$ |

В общем случае равномерная асимптотика в этих случаях выражается по формуле (подробнее см. [12, 13]):

$$U(\vec{r},t)=e^{i\theta}\left\{(l_1)_g I^{\Sigma}(\vec{S})+\sum_{k=2}^{N_g}(l_k)_g\frac{\partial I^{\Sigma}}{\partial S^g_{k-1}}+(l_1)_E I^{\Sigma_E}(\vec{S}^E)+\sum_{k=2}^{N_E}(l_k)_E\frac{\partial I^{\Sigma_E}}{\partial S^E_{k-1}}\right\}.$$

где: $I^{\Sigma}(\vec{S})$ – СВК краевой волновой катастрофы $\Sigma=(\Sigma_g, \Sigma_E)$,

$\vec{S}=(\vec{S}^g, \vec{S}^E)$ – аргументы СВК, включающие коэффициенты и функциональные модули,

$I^{\Sigma_E}(\vec{S}^E)$ – специальная функция сужения, то есть СВК основной волновой катастрофы типа $\Sigma_E$,

$N_g$ – кратность (число лучей) ГО катастрофы $\Sigma_g$,

$N_E$ – кратность (число лучей) краевой катастрофы $\Sigma_E$.

В частности, если

$$\psi(\omega)=\frac{1}{2}\alpha(\omega-\omega_o)^2, \qquad f(\eta)=\frac{1}{2}b\eta^2 \tag{14}$$

возникает сечение краевой катастрофы $F_4=(A_2, A_2)$. На рис.4 и 5 показаны ПВ ГО лучи (сплошные тонкие линии), каустика ПВ ГО лучей (толстая линия с точки обрыва), ПВ краевые лучи (пунктир) и каустика краевых лучей (толстая непрерывная линия). Предельный ГО луч касается как каустики краевых лучей, так и каустики ГО лучей, но в разных точках:

$$R_{cg}=\frac{1}{\beta}\left(\frac{1}{b\omega_o}-\alpha\right); \quad R_{cE}=-\frac{\alpha}{\beta}; \quad \alpha<0, \quad R_{cg}>R_{cE}; \quad \beta=\frac{\omega_p^2}{\omega_o^3}(\varepsilon(\omega_o))^{-3/2}.$$

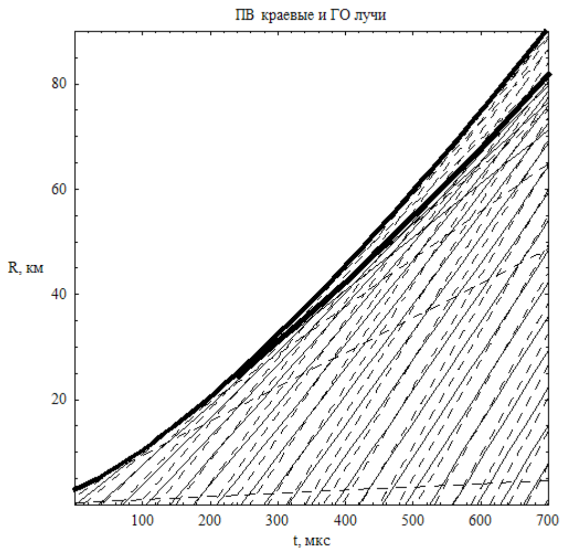


**Рис. 4.**

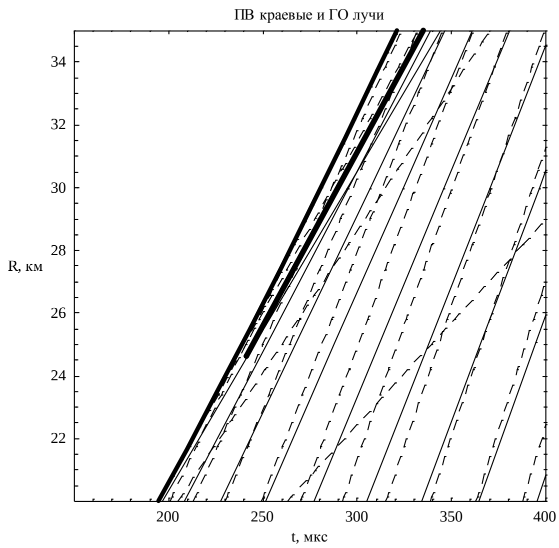


**Рис. 5.**

$b$=1500 $c^{-1}$, $\alpha$=–1,4 $10^{-11}$ $c^2$, $\omega_0=2\pi f_0$, $f_0$ = 13,5 МГц, $\omega_p=2\pi f_p$, $f_p\approx$ 12,7 МГц

Рис. 5. является фрагментом рис. 4. Видно, что в этом сечении каустики не пересекаются. Равномерная асимптотика радиосигнала имеет вид

$$U(\vec{r},t)=e^{i\theta}\left\{(l_1)_g I^{F_4}(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)+(l_2)_g\frac{\partial I^{F_4}}{\partial\lambda_2}+(l_1)_E A_i^{+}(\lambda_1)+(l_2)_E\left(A_i^{+}(\lambda_1)\right)^{\nabla}\right\}, \tag{15}$$

где:

$$I^{F_4}(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)=\int_0^{+\infty}dz\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left\{i\left(\pm z^2+x^3+\lambda_1 x+\lambda_2 z+\lambda_3 zx\right)\right\}dx \qquad (16)$$

СВК краевой волновой катастрофы $F_4$,

$$A_i^{\pm}(\lambda_2)=I^{A_2}=\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left\{i\left(\pm x^3+\lambda_2 x\right)\right\}dx \qquad (17)$$

функция Эйри (СВК основной волновой катастрофы $A_2$,), а

$$\left(A_i^{\pm}(\lambda_2)\right)^{\nabla}=i\int_{-\infty}^{+\infty}x\exp\left\{i\left(\pm x^3+\lambda_2 x\right)\right\}dx \qquad (18)$$

её производная. Аналогично могут быть исследованы и более сложные краевые особенности. Следует отметить, что речь идет о высокочастотной асимптотике, и поэтому все построения не имеют смысла за пределами окрестности, хотя возможно и достаточно широкой, предельного ПВ ГО луча.

Таким образом, в настоящей работе рассмотрены основные идеи, лежащие в основе применения теории краевых волновых катастроф [17, 18] к описанию распространения частотно-модулированных радиосигналов в плазме. Приведены лучевые и каустические структуры и равномерные асимптотики для простых пространственно-временных краевых особенностей, соответствующих катастрофам $B_{N+1}$, $C_{N+1}$, $F_4$ , а также в общем случае.

*Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты № 12-02-00413-а, № 13-07-00937).*

**Литература**

1. Анютин А.П., Боровиков В.А. Равномерные асимптотики интегралов от быстроосциллирующих функций с особенностями внеэкспоненциального множителя: Препринт / ИРЭ АН СССР. М., 1984, № 42 (414). 54 с.

2. Крюковский А.С., Лукин Д.С., Палкин Е.А., Растягаев Д.В. Теория катастроф в проблемах стационарной и нестационарной дифракции // Труды X школы – семинара по дифракции и распространению волн. 7 -15.02.1993./М.: МФТИ. 1993. С. 36–111.

3. Крюковский А.С., Лукин Д.С. Краевые и угловые катастрофы в равномерной геометрической теории дифракции. Учебное пособие. М.: МФТИ, 1999. 134 с.

4. Гинзбург В.Л. Распространение электромагнитных волн в плазме. 2-е изд. М.: Наука, 1967. 684 с.

5. Кравцов Ю.А., Островский Л.А., Степанов Н.С. Геометрическая оптика неоднородных и нестационарных движущихся сред.//ТИИЭР. 1974. Т.62. № 11. С.91 – 112.

6. Кравцов Ю.А., Орлов Ю.И. Геометрическая оптика неоднородных сред. М.: Наука. 1980. 304 с.

7. Felsen L.B. Transients in dispersive media, part 1: theory // IEEE Trans. on Ant. and Prop. 1969. AP-17.№ 2. P.191 – 200.

8. Lewis R.M. Asymptotic theory of transients //In: Electromagnetic Wave Theory. Part 2. Ed. by J. Brown / N.Y.: Pergamon Press. 1967. P.845–869.

9. Анютин А. П. Асимптотическая теория распространения радиосигналов в неоднородной плазме.//Распространение радиоволн в ионосфере. М.: ИЗМИР АН СССР. 1978. С.29–36.

10. Анютин А.П. Равномерная модификация метода ВГТД в случае произвольной диспергирующей среды и каустик ВГО и ВГТД лучей. // Дифракция и распространение волн. Междув. сборник / М.: МФТИ, 1985. С. 32 – 36.

11. Чистяков Д.Н., Крюковский А.С., Лукин Д.С., Растягаев Д.В. Трехмерные

пространственно-временные фокусировки радиоимпульсов в нестационарных диспергирующих средах. //Труды XII Всероссийской школы-конференции по дифракции и распространению волн. М., 19-23.12.2001, РосНОУ. Тез. докл. /М.: МФТИ (ГУ). 2001. Т. 2. С.456-459.
12. Крюковский А.С. Равномерная асимптотическая теория краевых и угловых волновых катастроф М.: РосНОУ, 2013. 368 с.
13. Крюковский А. С., Лукин Д. С., Палкин Е. А. Краевые и угловые катастрофы в задачах дифракции и распространения волн. Казань: Каз. авиационный ин-т, 1988. 199 с.
14. Крюковский А.С. Необходимые и достаточные условия образования основных волновых катастроф с корангом, равным двум.// Распространение и дифракция электромагнитных волн. Междувед.сб./М.: МФТИ. 1993. С. 4 - 19.
15. Крюковский А.С. Необходимые и достаточные условия образования краевых катастроф. //Проблемы дифракции и распространения волн. Межвед. сб./ М.: МФТИ, 1994, с. 47 - 54.
16. Крюковский А.С., Растягаев Д.В. О необходимых и достаточных условиях образования каспоидных катастроф. // Распространение и дифракция волн в неоднородных средах. Сб./ М.:МФТИ 1989. С.56-60.
17. Ипатов Е. Б., Крюковский А. С., Лукин Д. С., Палкин Е. А. Краевые катастрофы и асимптотики // ДАН СССР. 1986. Т. 291. № 4. С. 823 - 827.
18. Крюковский А.С., Лукин Д.С., Палкин Е.А. Равномерные асимптотики и угловые катастрофы.//Доклады РАН. 1995. Т.341. № 4. С. 456-459.