

## Дифракция плоской сверхкороткоимпульсной электромагнитной волны на плоском металлическом листе прямоугольной формы.

А.В. Кочетов, В.В. Никитин

ОАО «НПП «Радар ммс», Санкт-Петербург, Новосельковская, 37, [radar@radar-mms.com](mailto:radar@radar-mms.com).

Рассмотрена дифракция плоской сверхкороткоимпульсной электромагнитной волны на поверхности плоской металлической пластины. Получены аналитические выражения для поля в дальней зоне с учетом пространственно-временной структуры падающей волны.

Дифракция электромагнитных волн на различных объектах посвящено множество публикаций, описывающих различные методы решения данной задачи. Эти методы, как правило, относятся к возбуждению объектов гармоническими сигналами [1].

Рассмотрим дифракцию плоской сверхкороткоимпульсной (СКИ) электромагнитной волны на плоском прямоугольном металлическом листе в (рис. 1).

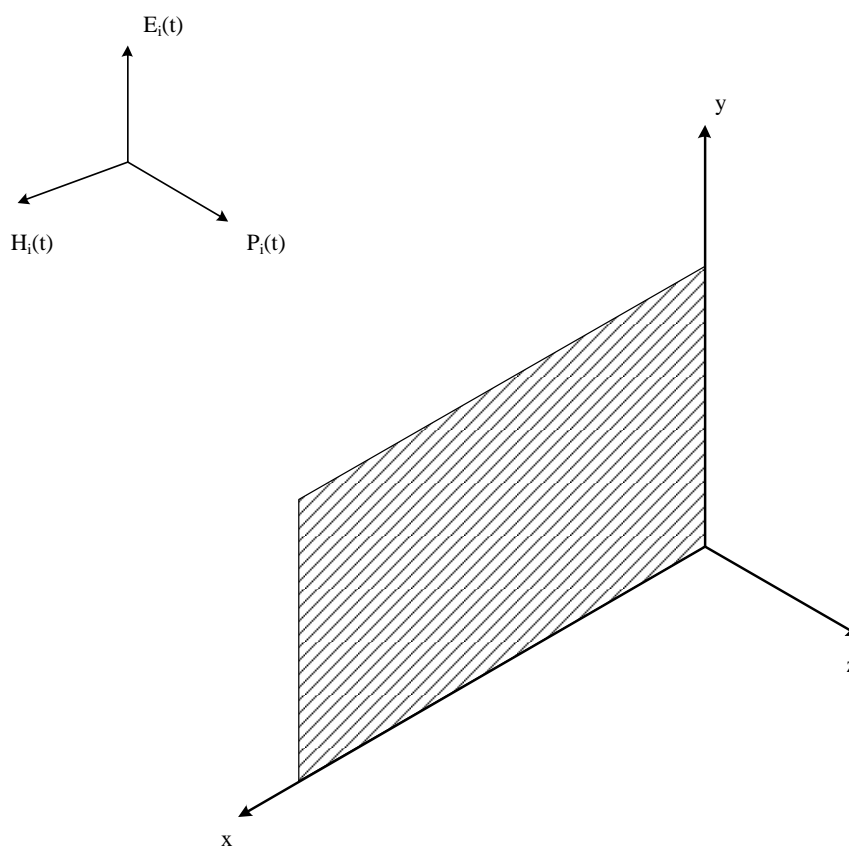


Рис. 1. Постановка задачи.

Пусть металлический лист расположен в плоскости  $Z = 0$ , а вектора напряженности электрического и магнитного поля описываются следующими выражениями:

$$\begin{aligned} \bar{E}_i(t, x, y, z) &= \bar{e}_y E_0 S_i \left( t - \frac{R(x, y, z, \theta_i, \varphi_i)}{c} \right) \\ \bar{H}_i(t, x, y, z) &= \bar{e}_x E_0 S_i \left( t - \frac{R(x, y, z, \theta_i, \varphi_i)}{c} \right) \end{aligned} \quad , \quad (1)$$

где:  $S_i(t)$  – временная зависимость амплитуды электромагнитного поля;

$E_0, H_0$  – амплитуда электрического и магнитного поля соответственно;

$\bar{e}_x, \bar{e}_y$  – базисные вектора декартовой системы координат;

$c$  – скорость света.

$\theta_i, \varphi_i$  – угол падения плоской волны на отражающую поверхность.

Рассчитаем электромагнитное поле, рассеянное на металлическом листе.

Представим временную зависимость  $S_i(t)$  как импульс Гаусса, длительностью  $\tau$  по уровню  $e^{-\beta}$  и высокочастотным заполнением  $f_0$ :

$$S_i(t) = e^{-\beta\left(\frac{t}{\tau}\right)^2 + j2\pi f_0 t} \quad (2)$$

В соответствии с принципами геометрической оптики, будем считать, что поле на металлическом листе при  $z = 0_+$  не отличается от поля падающей волны, а поле на поверхности листа равно нулю и определяется формулами:

$$\begin{aligned} \bar{E}_s(t, x, y, 0) &= \bar{e}_x E_0 S_i\left(t - \frac{R(x, y, 0)}{c}\right) \\ \bar{H}_s(t, x, y, 0) &= \bar{e}_y E_0 S_i\left(t - \frac{R(x, y, 0)}{c}\right) \end{aligned} \quad \text{на поверхности листа.}$$

Данное приближение справедливо только для металлических листов, размеры которых значительно больше пространственной длительности импульса, так как оно не учитывает неравномерность поля на краях самого листа.

Для определения рассеянного поля перед металлическим листом требуется вычислить векторный потенциал электрического типа по известной формуле [1] для нестационарного режима:

$$\bar{A}(t, r, \theta, \varphi) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\bar{J}\left(t - \frac{R}{c}\right)}{R} dV, \quad (3)$$

где:  $\bar{J}(t)$  – вектор плотности поверхностных токов;

$V$  – объем, по которому протекают токи.

Расстояние между точкой интегрирования  $P$ , в которой протекает ток и точкой наблюдения  $M$ , (рис.1) определяется как:

$$R = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos(r \wedge r')}, \quad (4)$$

где:  $r$  – расстояние от начала координат до точки наблюдения;

$r'$  – расстояние от начала координат до точки интегрирования;

$r \wedge r'$  - угол между векторами  $\bar{r}$  и  $\bar{r}'$ .

Вектор плотности поверхностных токов можно найти, воспользовавшись принципом эквивалентных токов, тогда:

$$\bar{J}(t, x, y) = 2\left[\bar{n}, \bar{H}_i(t, x, y, 0, \theta_i, \varphi_i)\right] = 2\bar{e}_x H_0, \quad (5)$$

где:  $\bar{n} = \bar{e}_z$  - внешняя нормаль к поверхности листа.

В промежуточной зоне с учетом приближения  $r \gg r'^2$  расстояние  $R \approx r - r' \cos(r \wedge r') + \frac{r'^2}{2r} (1 - \cos(r \wedge r'))^2$ . Так как  $\frac{r'^2}{2r} \cos(r \wedge r')^2$  вносит малый вклад по сравнению с остальными членами, то им можно пренебречь, тогда в декартовой системе координат выражение для расстояния от точки интегрирования до точки наблюдения примет вид:

$$R \approx r - \frac{x}{c} \sin(\theta) \cos(\varphi) - \frac{y}{c} \sin(\theta) \sin(\varphi) + \frac{x^2 + y^2}{2r}. \quad (6)$$

Тогда векторный потенциал электрического типа выражается следующим выражением:

$$\begin{aligned} \bar{A}(t, r, \theta, \varphi) = & \frac{\mu_0 \bar{e}_x H_0}{4\pi r} \int_{-a}^a \int_{-b}^b S_i \left( t - \frac{r}{c} + \frac{x}{c} (\sin(\theta) \cos(\varphi) - \sin(\theta_i) \cos(\varphi_i)) + \right. \\ & \left. + \frac{y}{c} (\sin(\theta) \sin(\varphi) - \sin(\theta_i) \sin(\varphi_i)) - \frac{x^2 + y^2}{2r} \right) dy dx, \end{aligned} \quad (7)$$

где:  $2a, 2b$  - длина и высота пластины соответственно.

Вычисление векторного потенциала в дальней зоне проводится следующим образом: подынтегральное выражение сводится к преобразованию Фурье от функции Гаусса по одной из координат, а затем полученное выражение раскладывается в степенной ряд и берется интеграл по второй координате.

После преобразований векторный потенциал электрического типа приобретает вид:

$$\begin{aligned} \bar{A}(t, r, \theta, \varphi) = & \frac{\mu_0 \bar{e}_x H_0 e^{\frac{\pi^2 f_0^2 \tau^2}{\beta}} (c\tau)^2}{2\pi r \beta (\sin(\theta) \cos(\varphi) - \sin(\theta_i) \cos(\varphi_i)) (\sin(\theta) \sin(\varphi) - \sin(\theta_i) \sin(\varphi_i))} \times \\ & \times \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{n! (2k+1)(2k+2)} \left\{ \frac{\sqrt{\beta}}{\tau} \left( t - \frac{r}{c} + \frac{x}{c} (\sin(\theta) \cos(\varphi) - \sin(\theta_i) \cos(\varphi_i)) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{y}{c} (\sin(\theta) \sin(\varphi) - \sin(\theta_i) \sin(\varphi_i)) \right) - \frac{j\pi f_0 \tau}{\sqrt{\beta}} \right\}^{2k+2} \Big|_{x=-a}^a \Big|_{y=-b}^b \end{aligned} \quad (8)$$

В связи с тем, что падающая волна плоская, то амплитуды электрического и магнитного поля связаны выражением:

$$H_0 = \frac{E_0}{\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}}. \quad (9)$$

Рассеянное электрическое поле определяется из выражения

$$\bar{E}_s(t, r, \theta, \varphi) = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} \int_0^t \text{rot}(\text{rot}(\bar{A}(t, r, \theta, \varphi))) dt, \quad (10)$$

поэтому выразим вектор  $\bar{e}_x$  декартовой системы координат через базисные вектора сферической системы координат:

$$\bar{e}_x = \bar{e}_r \sin(\theta) \cos(\varphi) + \bar{e}_\theta \cos(\theta) \cos(\varphi) - \bar{e}_\varphi \sin(\varphi). \quad (11)$$

Так как в дальней зоне напряженность электрического поля должна убывать не быстрее чем  $\frac{1}{r^2}$ , то составляющие поля примут следующий вид:

$$E_r(t, r, \theta, \varphi) = 0, \quad (12)$$

$$E_\theta(t, r, \theta, \varphi) = -\frac{\cos(\theta) \cos(\varphi)}{\mu_0 \varepsilon_0 r} \int_0^t \left\{ \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r \bar{A}(t, r, \theta, \varphi)) \right\} dt, \quad (13)$$

$$E_\varphi(t, r, \theta, \varphi) = \frac{\sin(\varphi)}{\mu_0 \varepsilon_0 r} \int_0^t \left\{ \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r \bar{A}(t, r, \theta, \varphi)) \right\} dt, \quad (14)$$

где: 
$$\int_0^t \left\{ \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r \bar{A}(t, r, \theta, \varphi)) \right\} dt = \frac{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0} E_0 e^{\frac{\pi^2 f_0^2 \tau^2}{\beta}} \tau}{4\sqrt{\pi r} \sqrt{\beta} (\sin(\theta) \sin(\varphi) - \sin(\theta_i) \sin(\varphi_i))} \times$$

$$\times \frac{1}{(\sin(\theta)\cos(\varphi) - \sin(\theta_i)\cos(\varphi_i))} \operatorname{erf} \left\{ \frac{\sqrt{\beta}}{\tau} \left( t - \frac{r}{c} + \frac{x}{c} [\sin(\theta)\cos(\varphi) - \sin(\theta_i)\cos(\varphi_i)] + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{y}{c} [\sin(\theta)\sin(\varphi) - \sin(\theta_i)\sin(\varphi_i)] - \frac{j\mathcal{A}_0\tau}{\sqrt{\beta}} \right) \right\} \Big|_{x=-a}^a \Big|_{y=-b}^b \quad (15)$$

В последнем выражении функция  $\operatorname{erf}(x)$  - функция вероятности ошибок.

Чтобы найти поле в пространстве за металлической пластиной, требуется вычислить векторный потенциал магнитного типа от фиктивных магнитных токов, протекающих в плоскости  $z=0$ , везде кроме металлической поверхности:

$$\bar{F}(t, r, \theta, \varphi) = \frac{\varepsilon_0}{4\pi} \left( \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{J}(t - \frac{R}{c})}{R} dydx + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-b}^b \frac{\bar{J}(t - \frac{R}{c})}{R} dydx + \int_{-a}^a \int_{-b}^b \frac{\bar{J}(t - \frac{R}{c})}{R} dydx + \right. \\ \left. + \int_{-a}^a \int_{-b}^b \frac{\bar{J}(t - \frac{R}{c})}{R} dydx \right) \quad (16)$$

что эквивалентно выражению

$$\bar{F}(t, r, \theta, \varphi) = \frac{\varepsilon_0}{4\pi} \left( \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{J}(t - \frac{R}{c})}{R} dydx - \int_{-a}^a \int_{-b}^b \frac{\bar{J}(t - \frac{R}{c})}{R} dydx \right), \quad (17)$$

где первому интегралу соответствует плоская падающая волна, второму – поле плоского прямоугольного раскрыва с магнитными токами:

$$\bar{J}_m(t, x, y) = 2[\bar{n}, \bar{E}_i(t, x, y, 0, \theta_i, \varphi_i)] = -2\bar{e}_y E_0.$$

Электрическое поле в пространстве при  $z > 0$  определяется исходя из выражения:

$$\bar{E}_s(t, r, \theta, \varphi) = \frac{1}{\varepsilon_0} \operatorname{rot}(\bar{F}(t, r, \theta, \varphi)) \quad (18)$$

Вектор  $\bar{e}_y$  в сферической системе координат выражается следующим образом:

$$\bar{e}_y = \bar{e}_r \sin(\theta)\sin(\varphi) + \bar{e}_\theta \cos(\theta)\sin(\varphi) + \bar{e}_\varphi \cos(\varphi) \quad (19)$$

Тогда электрическое поле магнитных токов в дальней зоне будет определяться выражениями:

$$E_r(t, r, \theta, \varphi) = 0 \quad (20)$$

$$E_\theta(t, r, \theta, \varphi) = \frac{\cos(\varphi)}{\varepsilon_0 r} \frac{\partial}{\partial r} (r\bar{F}(t, r, \theta, \varphi)) \quad (21)$$

$$E_\varphi(t, r, \theta, \varphi) = -\frac{\cos(\theta)\sin(\varphi)}{\varepsilon_0 r} \frac{\partial}{\partial r} (r\bar{F}(t, r, \theta, \varphi)) \quad (22)$$

Функция  $\frac{\partial}{\partial r} (r\bar{F}(t, r, \theta, \varphi))$  вычисляется аналогично функции

$$\int_0^t \left\{ \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\bar{A}(t, r, \theta, \varphi)) \right\} dt \text{ и равна:}$$

$$\frac{\partial}{\partial r}(r\bar{F}(t, r, \theta, \varphi)) = \frac{\varepsilon_0 E_0 e^{\frac{\pi^2 f_0^2 t^2}{\beta}}}{4\sqrt{\pi r} \sqrt{\beta} (\sin(\theta) \sin(\varphi) - \sin(\theta_i) \sin(\varphi_i)) (\sin(\theta) \cos(\varphi) - \sin(\theta_i) \cos(\varphi_i))} \times$$

$$\times \operatorname{erf} \left\{ \frac{\sqrt{\beta}}{\tau} \left( t - \frac{r}{c} + \frac{x}{c} [\sin(\theta) \cos(\varphi) - \sin(\theta_i) \cos(\varphi_i)] \right) + \right.$$

$$\left. + \frac{y}{c} [\sin(\theta) \sin(\varphi) - \sin(\theta_i) \sin(\varphi_i)] - \frac{j\pi f_0 \tau}{\sqrt{\beta}} \right\} \Big|_{x=-a}^a \Big|_{y=-b}^b \quad (23)$$

Убедимся, что при переходе к гармоническому сигналу (при  $\tau \rightarrow \infty$ ) из формулы (15), (23) вытекают известные выражения.

При стремлении аргумента к бесконечности функция вероятности ошибок асимптотически приобретает вид  $\operatorname{erf}(x) \rightarrow Ae^{-x^2}$  [2], где  $A$  – постоянный множитель.

После математических преобразований получим:

$$\int_0^t \left\{ \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\bar{A}(t, r, \theta, \varphi)) \right\} dt \rightarrow A \frac{\sin \left( 2\pi f_0 \frac{a}{c} \{ \sin(\theta) \cos(\varphi) - \sin(\theta_i) \cos(\varphi_i) \} \right)}{r(\sin(\theta) \cos(\varphi) - \sin(\theta_i) \cos(\varphi_i))} \times$$

$$\times \frac{\sin \left( 2\pi f_0 \frac{b}{c} \{ \sin(\theta) \sin(\varphi) - \sin(\theta_i) \sin(\varphi_i) \} \right)}{(\sin(\theta) \sin(\varphi) - \sin(\theta_i) \sin(\varphi_i))} e^{-j2\pi \left( t - \frac{r}{c} \right)} \quad (24)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} (rF(t, r, \theta, \varphi)) \rightarrow B \frac{\sin \left( 2\pi f_0 \frac{a}{c} (\sin(\theta) \cos(\varphi) - \sin(\theta_i) \cos(\varphi_i)) \right)}{(\sin(\theta) \cos(\varphi) - \sin(\theta_i) \cos(\varphi_i))} \times$$

$$\times \frac{\sin \left( 2\pi f_0 (\sin(\theta) \sin(\varphi) - \sin(\theta_i) \sin(\varphi_i)) \right)}{(\sin(\theta) \sin(\varphi) - \sin(\theta_i) \sin(\varphi_i))} e^{-j2\pi f_0 \left( t - \frac{r}{c} \right)} \quad (25)$$

где  $A$  и  $B$  - постоянные множители.

Исследуем поведение рассеянного поля при постоянном ( $f_0 \tau$ ), и различных углах падения плоской волны на пластину. Размеры пластины примем равными  $2a = 240$  мм;  $2b = 140$  мм.

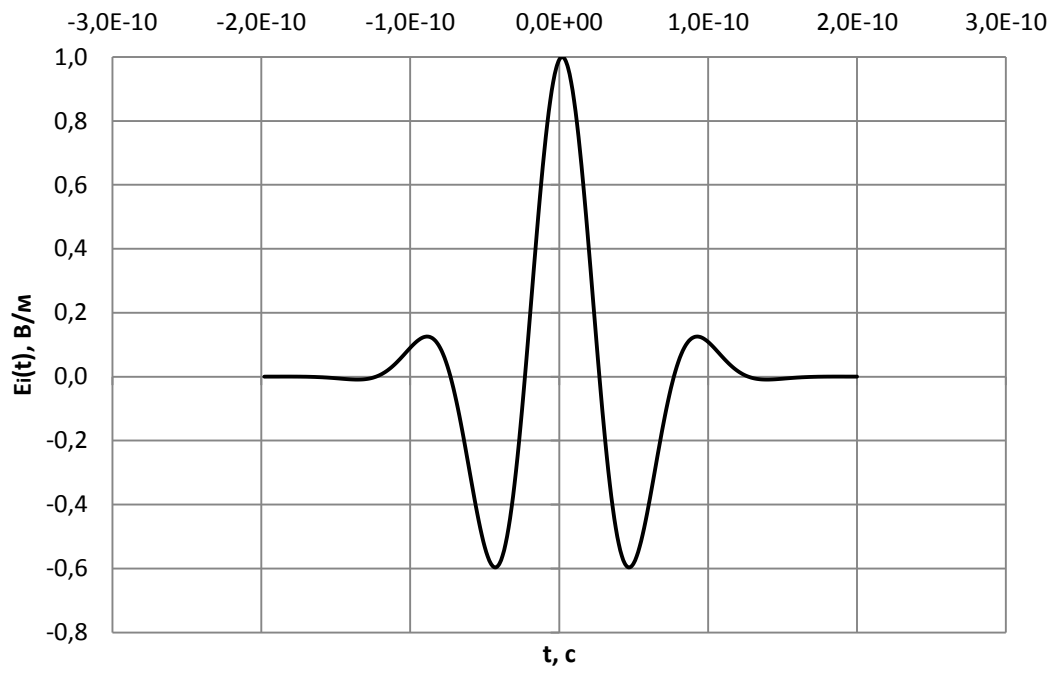


Рис. 1. Возбуждающий импульс при  $f_0\tau = 1$

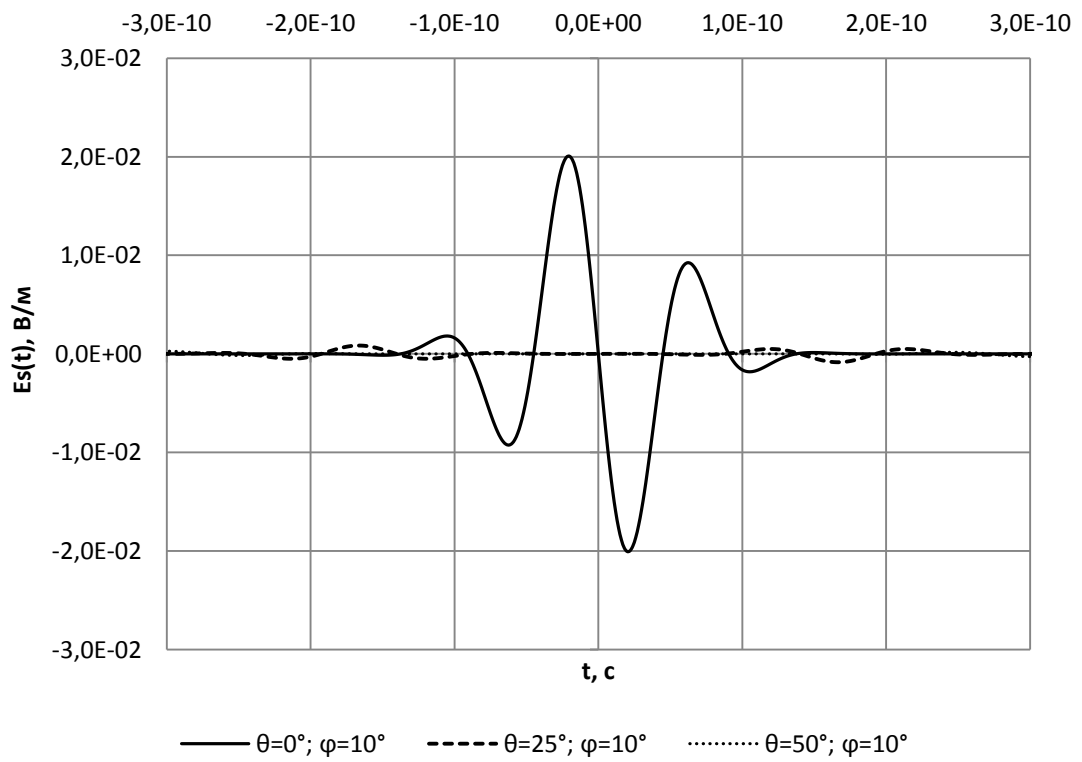
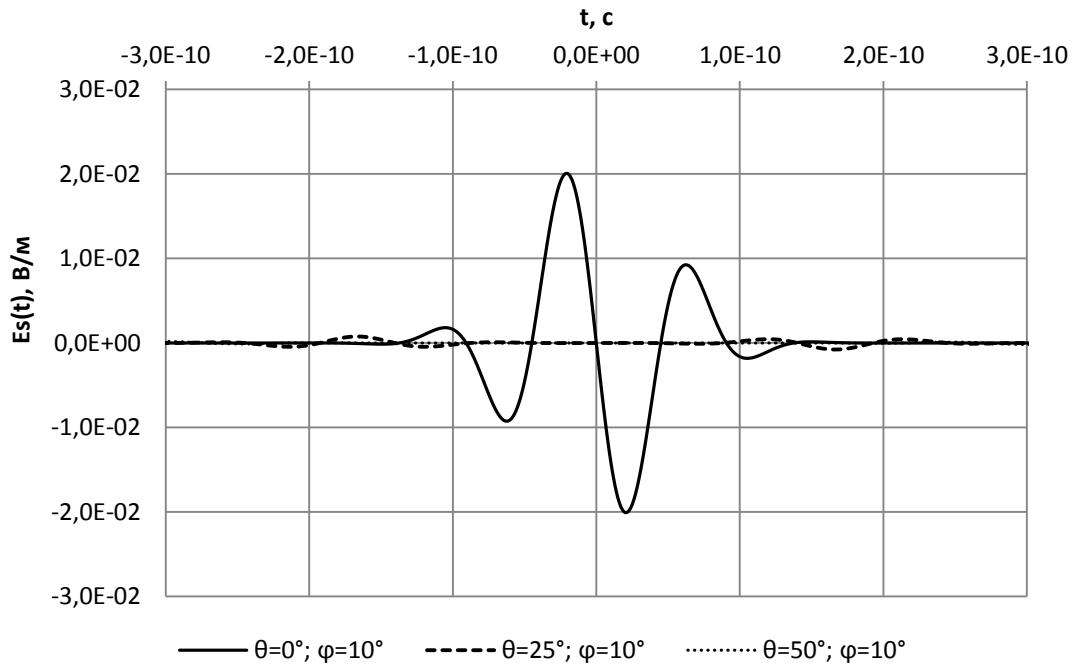
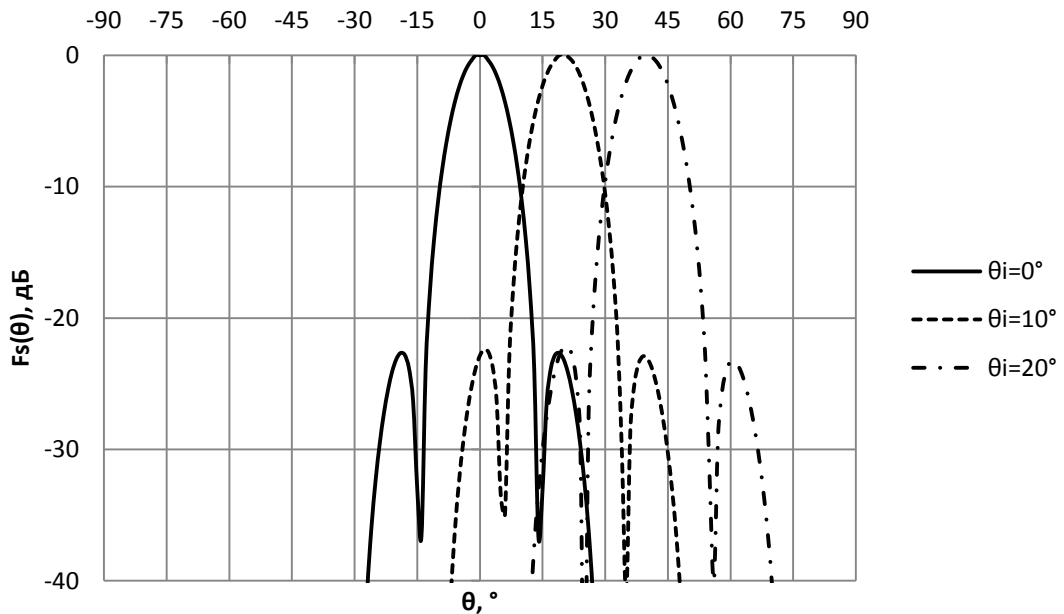


Рис. 2. Импульс рассеянного поля в переднем полупространстве при  $f_0\tau = 1$



**Рис. 3. Импульс рассеянного поля в заднем полупространстве при  $f_0\tau = 1$**

Из рис. 2, 3 видно, что рассеянное поле в переднем и заднем полупространстве не отличается по форме и имеет одинаковую угловую зависимость. При больших углах отраженный импульс разваливается на две части и падает по амплитуде. Это связано с тем, что время за которое рассеянные импульсы проходят расстояние от светящихся точек до точки наблюдения превышает длительность импульса  $\tau$ .



**Рис. 4. Диаграмма рассеяния в переднем полупространстве при различных углах падения плоской волны**

Одной из важных характеристик отражающего объекта является его эффективная поверхность рассеяния (ЭПР), которая характеризует способность данного объекта отражать электромагнитное поле в заданном направлении.

По определению ЭПР является отношением принятой мощности, отраженной от объекта, к плотности потока мощности, которая падает на объект, таким образом:

$$\sigma = 4\pi r^2 \frac{E_s^2}{E_i^2}, \quad (26)$$

где:  $r$  - расстояние между приемником и целью,

$E_s, E_i$  - амплитуды падающей и отраженной волн соответственно.

Тогда для СКИ можно записать следующее выражение:

$$\sigma = \frac{(\pi \omega_0)^2 \left( \sin(\varphi)^2 + \cos(\theta)^2 \cos(\theta_i)^2 \right) \left( e^{\frac{-\pi^2 f_0^2 \tau^2}{\beta}} \right)^2}{4\beta \left( \sin(\theta) \cos(\varphi) - \sin(\theta_i) \cos(\varphi_i) \right)^2 \left( \sin(\theta) \sin(\varphi) - \sin(\theta_i) \sin(\varphi_i) \right)^2 S_0^2(t_{\max})} \times \left| \operatorname{erf} \left( \frac{\sqrt{\beta}}{\tau} (t_{\max} - \Delta t) - \frac{j\pi f_0 \tau}{\sqrt{\beta}} \right) \right|_{x=-a}^a \Big|_{y=-b}^b \quad (27)$$

где  $\Delta t = \frac{r}{c} - \frac{x}{c} [\sin(\theta) \cos(\varphi) - \sin(\theta_i) \cos(\varphi_i)] - \frac{y}{c} [\sin(\theta) \sin(\varphi) - \sin(\theta_i) \sin(\varphi_i)]$ ,

Для отраженного сигнала в дальней зоне момент времени при котором отклик будет максимальным вычисляется по формуле:

$$t_{\max} = \frac{r}{c} \pm \frac{a}{c} [\sin(\theta) \cos(\varphi) - \sin(\theta_i) \cos(\varphi_i)] \pm \frac{b}{c} [\sin(\theta) \sin(\varphi) - \sin(\theta_i) \sin(\varphi_i)], \quad (28)$$

Таким образом, момент времени максимального значения амплитуды рассеянного поля зависит от геометрических размеров пластины и от направления на источник наблюдения и точку наблюдения.

В направлении нормали ЭПР пластины с размерами  $2a = 240$  мм;  $2b = 140$  мм при  $f_0 = 10$  ГГц и  $f_0 \tau = 1$  составляет  $15,76 \text{ м}^2$ , что соответствует величине ЭПР для монохроматического сигнала с частотой  $f_0$ . Расчеты показали, что ЭПР в направлении нормали не зависит от длительности импульса.

### Литература

1. Гольдштейн Л. Д., Зернов Н. В. Электромагнитные поля и волны. М.: Советское радио, 1971.
2. Копсон Э. Т. Асимптотические разложения. М.: Мир, 1966.