

## О распознавании зеркальных объектов

А.Г. Кюркчан

Московский технический университет связи и информатики, Российская Федерация,  
111024, Москва, ул. Авиамоторная, 8а, E-mail: [agkmtuci@yandex.ru](mailto:agkmtuci@yandex.ru);

ФИРЭ им. В.А. Котельникова РАН, Российская Федерация, 141190 Фрязино Московской  
обл., пл. Введенского, 1;

ФГУП Центральный научно-исследовательский институт связи, Российская федерация,  
111141, Москва, 1-й проезд Перова поля, 8.

*В работе обсуждается проблема зрительного распознавания зеркальных объектов, т.е. тел с идеально гладкой (аналитической) поверхностью. Зрительное восприятие такого рода объектов в значительной степени зависит от их окружения в отличие от тел с неровной (шероховатой) поверхностью, зрительные образы которых инвариантны по отношению к окружающей обстановке. Проблема обсуждается в тесной увязке с аналитическими свойствами дифракционного (рассеянного телом) поля, а именно – с локализацией особенностей аналитического продолжения волнового поля внутрь рассеивателя.*

*In work the problem of visual recognition of mirror objects, i.e. bodies with ideally smooth (analytical) surface is discussed. Visual perception of such objects substantially depends on their environment unlike bodies with an uneven (rough) surface, which visions are invariant in relation to a surrounding situation. The problem is discussed in close coordination with analytical properties diffraction (scattered by a body) fields, namely – with localization of analytical continuation singularities of the wave field in the scatterer.*

Как известно, монохроматические волны (электромагнитные или звуковые) могут быть описаны некоторой функцией  $U^1(\vec{r}) \equiv U^1(x, y, z)$ , удовлетворяющей уравнению Гельмгольца

$$\Delta U^1 + k^2 U^1 = 0, \quad (1)$$

где  $\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$  – оператор Лапласа,

$k = 2\pi/\lambda$  – волновое число,

$\lambda$  – длина волны моделируемых колебаний.

Функцию  $U^1$  будем в дальнейшем называть волновым полем. Если на пути первичного волнового поля  $U^0(x, y, z)$  некоторого источника излучения имеется какое-либо препятствие (рассеиватель) – тело, ограниченное поверхностью  $S$ , то отраженное (рассеянное) этим телом волновое поле может быть найдено при помощи следующего соотношения (см., например, [1, 2])

$$U^1(\vec{r}) = \int_S \left\{ U(\vec{r}') \frac{\partial G_0(\vec{r}; \vec{r}')}{\partial n'} - \frac{\partial U(\vec{r}')}{\partial n'} G_0(\vec{r}; \vec{r}') \right\} ds', \quad (2)$$

где  $U \equiv U^0 + U^1$  – полное (падающее плюс рассеянное) поле,

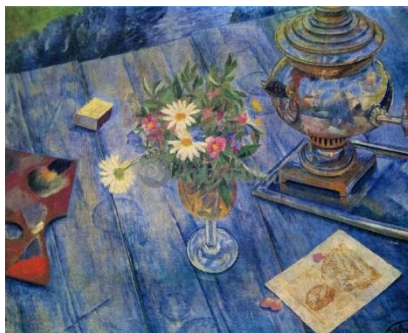
$$G_0(\vec{r}; \vec{r}') = \frac{1}{4\pi} \frac{\exp(-ik|\vec{r} - \vec{r}'|)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (\text{в трехмерном случае}) \quad \text{и} \quad G_0(\vec{r}; \vec{r}') = \frac{1}{4i} H_0^{(2)}(k|\vec{r} - \vec{r}'|)$$

(в двумерном) – фундаментальное решение уравнения Гельмгольца (функция Грина свободного пространства),

$\frac{\partial}{\partial n'}$  – дифференцирование в направлении внешней по отношению к  $S$  нормали.

Функция  $G_0(\vec{r}; \vec{r}')$  представляет собой поле в некоторой точке  $M(\vec{r})$  от точечного источника, расположенного в точке  $N(\vec{r}')$ . Таким образом, в соответствии с формулой (2) поле первичных источников (например, света), рассеянное (отраженное) некоторым телом, является результатом излучения множества вторичных источников, расположенных на его поверхности  $S$ . Иными словами, мы видим результат излучения этих источников.

Обратимся теперь к ситуации, когда мы рассматриваем зеркальный объект, т.е. отполированный до такой степени, что шероховатости на его поверхности не воспринимаются глазом. Например, идеально отполированную сферу (простейший пример – елочная игрушка в виде зеркального шара). Если вблизи такой сферы нет никаких предметов, и мы подсветили ее каким-либо источником света в темноте, то ее очертания будут довольно неопределенными. Надо отметить, что художников часто интересовала проблема визуализации зеркальных объектов. Так, изображения такого рода объектов присутствуют на ряде полотен известного русского художника К.С. Петрова-Водкина.



**К.С. Петров-Водкин. Натюрморт с самоваром**

Весьма важным для дальнейшего является то обстоятельство, что функция  $U^1(\vec{r})$ , будучи решением однородного уравнения Гельмгольца (1), когда  $M(\vec{r}) \in R^3 \setminus \bar{D}$ , где  $D$  – область внутри  $S$ ,  $\bar{D} \equiv D \cup S$ , является всюду вне  $\bar{D}$  аналитической [1] и, в частности, по этой причине представима в окрестности каждой точки, где она аналитична, степенным рядом, например, рядом по степеням  $1/kr$  (рядом Аткинсона-Уилкокса) [1, 2]. Как хорошо известно, радиус сходимости такого ряда равен расстоянию от центра разложения до ближайшей особой точки функции  $U^1(\vec{r})$ . Это обстоятельство позволяет осуществлять аналитическое продолжение функции  $U^1(\vec{r})$  за пределы ее первоначальной области определения [2 – 4]. Функция  $U^1(\vec{r})$  должна иметь особые точки, т.к. в противном случае она была бы равна нулю всюду [2]. Очевидно, что эти особые точки лежат в области  $D$  и (или) на ее границе.

Что из себя представляют упомянутые особенности функции  $U^1(\vec{r})$ ? Рассмотрим простой пример. Пусть перед плоским зеркалом  $S$  расположен источник света. Глядя в зеркало, мы увидим источник света в симметричной относительно  $S$  точке, расположенной за зеркалом (см. рис. 1). Этот мнимый источник (изображение) мы видим, продолжая вдоль прямых линий лучи, отраженные от зеркала. Изображение источника и есть результат аналитического продолжения отраженного от зеркала поля в область за зеркалом.

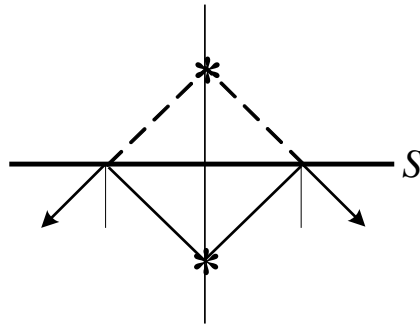


Рис. 1.

Полученное изображение мы воспринимаем как некий дополнительный источник света, находящийся по другую сторону зеркала, т.е. – в "зазеркалье". При этом если мы начнем отодвигать источник от зеркала, то и его изображение в зазеркалье также будет симметрично отодвигаться как угодно далеко.

Совершенно иная ситуация будет иметь место при отражении от неплоской поверхности. Представим, что мы начинаем изгибать плоское зеркало, поднимая его «края». Пространство за зеркалом начнет «сжиматься», образуя «складку». При этом может произойти эффект исчезновения части изображения, или даже всего изображения объекта (хорошо известный всем, кто рассматривал изображение в кривых зеркалах, – вспомним комнату смеха). Этот эффект обязан своим происхождением образованию "складок" в гипотетической зазеркальной среде, т.е. таких областей, в которые должны попадать два (или более) изображения одновременно. При этом исчезающая часть изображения «прячется в складку». Более подробное качественное обсуждение этого эффекта приведено в работе [4].

При решении задач дифракции на компактных препятствиях волновое (рассеянное препятствием) поле также должно иметь особенности. Очевидно, что эти особенности должны лежать вне области, в которой ищется дифракционное поле (в так называемой нефизической области). Таким образом, речь идет об особенностях аналитического продолжения волнового поля за пределы области его первоначального определения.

Обсудим это более подробно. Обратимся к представлению (2), ограничившись вначале двумерным случаем. Пусть уравнение границы  $S$  рассеивателя (которую для простоты мы будем предполагать звездной) может быть записано как  $r = \rho(\varphi)$ . Введем комплексную величину:

$$\zeta = \rho(\varphi) e^{i\varphi}. \quad (3)$$

Если в (3) величина  $\varphi$  вещественна, то на комплексной плоскости  $z = re^{i\varphi}$  переменная  $\zeta$  будет описывать контур  $C$ , геометрически совпадающий с  $S$ . Если же положить  $\varphi = \varphi_1 + i\varphi_2$ , то контур  $C$  будет деформироваться, в частности, при положительных  $\varphi_2$  - сжиматься.

Такая деформация возможна до тех пор, пока отображение (3) остается взаимно однозначным. Кроме того, поскольку в граничные значения функций  $U(\vec{r})|_S$  и  $\frac{\partial U(\vec{r})}{\partial n}|_S$

входят значения функций  $U^0(\vec{r})|_S$  и  $\frac{\partial U^0(\vec{r})}{\partial n}|_S$ , то вышеописанная деформация будет ограничена также особыми точками функции  $U^0(\vec{r})|_S$  при ее продолжении в область комплексных значений  $\varphi$ .

Взаимная однозначность отображения (3) нарушается, очевидно, в точках, где

$$\zeta'(\varphi) \equiv [\rho'(\varphi) + i\rho(\varphi)]e^{i\varphi} = 0. \quad (4)$$

Важно отметить, что уравнение (4) эквивалентно совокупности двух уравнений:

$$\begin{cases} [\rho'(\varphi) + i\rho(\varphi)] = 0, \\ e^{i\varphi} = 0. \end{cases} \quad (4a)$$

При этом уравнение  $e^{i\varphi} = 0$  нельзя отбрасывать, т.к. не учет корня этого уравнения приводит к потере части множества особенностей (для ряда фигур весьма существенной).

Особенности же функции  $U^0(\vec{r})|_S$  будут находиться в точках “изображения” источников первичного поля, попадая туда по комплексным характеристикам. Координаты этих изображений могут быть найдены при помощи принципа симметрии Римана-Шварца [4, 5].

Рассмотрим иной способ определения координат изображения точечного источника. Пусть

$$U^0(\vec{r}) = \frac{1}{4i} H_0^{(2)}(k|\vec{r} - \vec{r}_0|) -$$

поле точечного источника. Имеем:

$$\begin{aligned} |\vec{r} - \vec{r}_0|^2|_S &= \rho^2(\varphi) + r_0^2 - 2r_0\rho(\varphi)\cos(\varphi - \varphi_0) = \\ &= [\rho(\varphi)e^{i\varphi} - r_0e^{i\varphi_0}][\rho(\varphi)e^{-i\varphi} - r_0e^{-i\varphi_0}]. \end{aligned}$$

Особенности у функции  $U^0(\vec{r})|_S$  будут, таким образом, при

$$\rho(\varphi)e^{\pm i\varphi} = r_0e^{\pm i\varphi_0}.$$

Кроме того, функция  $U^0(\vec{r})$  имеет особенность на бесконечности.

Корень уравнения  $\rho(\varphi)e^{i\varphi} = r_0e^{i\varphi_0}$  соответствует особенности функции  $U^0(\vec{r})$  в точке источника  $r_0e^{i\varphi_0} = x_0 + iy_0$ . Рассмотрим теперь уравнение

$$\rho(\hat{\varphi})e^{-i\hat{\varphi}} = r_0e^{-i\varphi_0} \equiv z^-. \quad (5)$$

Если в этом уравнении считать величину  $\hat{\varphi}$  вещественной, то мы получим ту же точку, что и в предыдущем случае. Поэтому будем решать уравнение (5), полагая, что  $\hat{\varphi} = \varphi_1 + i\varphi_2$  - комплексная величина. Из (3) и (5) имеем

$$\zeta_{oc} \exp(-i2\hat{\varphi}(z^-)) = z^-,$$

т.е.

$$\zeta_{oc} = z^- \exp(i2\hat{\varphi}(z^-)), \quad (6)$$

где  $\zeta_{oc} \equiv \zeta(\hat{\varphi}(z^-))$ .

Соотношение (6) и дает нам координаты «изображения» источника. Помимо этого необходимо еще найти изображение бесконечно удаленной точки [2].

Изложенная выше техника локализации особых точек без изменений переносится на трехмерный случай, когда рассеиватель является телом вращения. При этом, естественно, соотношения (4) и (6) позволяют найти координаты особых точек в осевом сечении рассеивателя.

В общей же ситуации в трехмерном случае аналитическую деформацию границы  $S$  рассеивателя можно осуществить, введя комплексную переменную

$$\zeta = \rho(\theta, \varphi)e^{i\theta} \quad (7)$$

где  $r = \rho(\theta, \varphi)$  - уравнение границы  $S$  в сферических координатах) и полагая угол  $\theta$  комплексным, а угол  $\varphi$  - параметром [2].

Найдя все особенности аналитического продолжения волнового поля внутри рассеивающего тела (т.е. в область  $D$ ), мы можем на основании принципа эквивалентности представить рассеянное этим предметом поле  $U^1(\vec{r})$  при помощи источников, расположенных на некоторой поверхности  $\Sigma$ , охватывающей множество особенностей. Иными словами, соотношение (2) в этом случае может быть заменено следующим [2]

$$U^1(\vec{r}) = \int_{\Sigma} \left\{ U(\vec{r}') \frac{\partial G_0(\vec{r}; \vec{r}')}{\partial n'} - \frac{\partial U(\vec{r}')}{\partial n'} G_0(\vec{r}; \vec{r}') \right\} d\sigma'. \quad (2a)$$

Таким образом, изображение объекта формируется источниками, расположенными на некотором носителе  $\Sigma$  внутри этого объекта. В ряде случаев, как мы увидим ниже, носитель вторичных источников  $\Sigma$  может располагаться весьма глубоко внутри рассеивателя.

Для того, чтобы понять, насколько глубоко внутри рассеивателя может быть размещен носитель источников рассеянного поля  $\Sigma$ , рассмотрим примеры локализации особенностей аналитического продолжения волнового поля.

### I. Особенности отображения (3)

Эти особенности могут быть найдены путем решения уравнений (4a).

Приведем примеры решения этих уравнений для различных геометрий.

#### 1. Эллиптический цилиндр

В качестве первого примера рассмотрим задачу дифракции плоской волны на эллиптическом цилиндре. Уравнение контура поперечного сечения  $S$  в этом случае имеет следующий вид

$$\rho(\varphi) = \frac{b}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \cos^2 \varphi}},$$

где  $b$  - малая полуось,

$$a = \frac{b}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \text{ - большая полуось,}$$

$$\varepsilon = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \text{ - эксцентриситет.}$$

Выполнив элементарные преобразования, для комплексного корня  $\varphi_0$  первого из уравнений (4a) будем иметь

$$\cos^2 \varphi_0 - i \cos \varphi_0 \sin \varphi_0 - 1/\varepsilon^2 = 0,$$

откуда получаем:

$$e^{i\varphi_0} = \pm \frac{\varepsilon}{\sqrt{2 - \varepsilon^2}},$$

т.е.

$$\zeta_{01} \equiv \zeta(\varphi_0) = \pm \frac{b\varepsilon}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} = \pm a\varepsilon = \pm f,$$

где  $2f$  - межфокусное расстояние.

Таким образом, особенности волнового поля внутри эллипса лежат в его фокусах. Второму уравнению (4a) соответствует особая точка в начале координат. Можно

показать (см. [2, 3]), что в фокусах эллипса волновое поле имеет точки ветвления второго порядка. Для выделения однозначной ветви точки  $\pm f$  должны быть соединены разрезом.

В трехмерном случае, когда рассеиватель имеет форму сфероида, особенности лежат в фокусах его осевого сечения.

## 2. Овал Кассини

В качестве второго примера рассмотрим форму границы  $S$  в виде овала Кассини:

$$\rho(\varphi) = a\sqrt{1 + \varepsilon^2 \cos^2 \varphi}, \quad \varepsilon < 1.$$

Первое из уравнений (4а) может быть переписано в виде

$$\varepsilon^2 \cos^2 \varphi_0 + i\varepsilon^2 \cos \varphi_0 \sin \varphi_0 + 1 = 0.$$

Решая это уравнение, имеем

$$e^{i\varphi_0} = \pm i \frac{\sqrt{2 + \varepsilon^2}}{\varepsilon}.$$

Таким образом, получаем

$$\zeta_{02} = \pm i \frac{a}{\varepsilon} \sqrt{1 + \varepsilon^2},$$

т.е.  $|\zeta_{02}| = \frac{a}{\varepsilon} \sqrt{1 + \varepsilon^2} > \rho\left(\pm \frac{\pi}{2}\right) = a$ ,  $\arg \zeta_{02} = \pm \frac{\pi}{2}$ . Следовательно, точки  $\zeta_{02}$  лежат вне  $S$  (см. рис. 2).

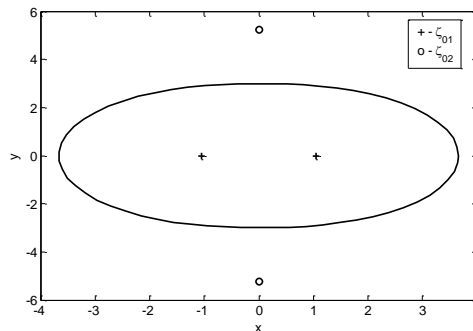


Рис. 2.

Решение второго из уравнений (4а) дает

$$\zeta(\varphi_0) = \pm \frac{a\varepsilon}{2} = \zeta_{01}.$$

Эти особые точки лежат внутри  $S$ , т.к.  $|\zeta_{01}| = \frac{a\varepsilon}{2} < \rho(0) = \rho(\pi) = a\sqrt{1 + \varepsilon^2}$ .

## 3. Многолистник

Рассмотрим теперь случай, когда граница  $S$  является многолистником, уравнение которого имеет следующий вид

$$\rho(\varphi) = a(1 + \tau \cos q\varphi), \quad 0 \leq \tau < 1, \quad q = 1, 2, 3, \dots \quad (8)$$

За. Случай  $q = 1$  требует отдельного рассмотрения. Кривая (8) называется при этом улиткой Паскаля. Как и в предыдущем примере, здесь необходимо рассмотреть оба уравнения (4а).

Решение второго из этих уравнений дает

$$\zeta(\varphi_0) = \frac{a\tau}{2} = \zeta_{01} .$$

Эта точка, как легко видеть, лежит внутри  $S$  (см. рис. 3).

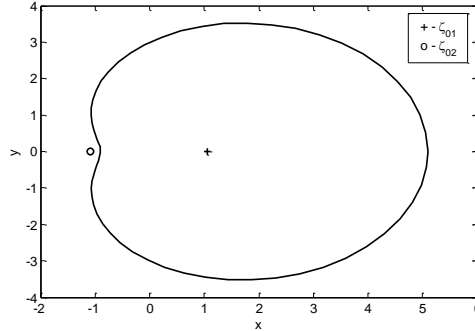


Рис. 3.

Первое из уравнений (4а) здесь выглядит следующим образом:

$$\rho'(\varphi_0) + i\rho(\varphi_0) = -a\tau \sin \varphi_0 + ia + ia\tau \cos \varphi_0 = 0$$

и имеет решение  $e^{i\varphi_0} = -1/\tau$ , т.е.

$$\zeta_{02} \equiv \rho(\varphi_0)e^{i\varphi_0} = a \left[ 1 + \frac{\tau}{2}(e^{i\varphi_0} + e^{-i\varphi_0}) \right] e^{i\varphi_0} = -\frac{a}{2\tau}(1 - \tau^2) .$$

Таким образом,  $|\zeta_{02}| = \frac{a}{2\tau}(1 - \tau^2)$ ,  $\arg \zeta_{02} = \pi$ . Следовательно, точка  $\zeta_{02}$  лежит вне  $S$  (см. рис. 3).

3б. Перейдем теперь к случаям, когда  $q = 2, 3, \dots$ . Здесь первое из уравнений (4а) принимает вид:

$$\rho'(\varphi_0) + i\rho(\varphi_0) = a(-q\tau \sin q\varphi_0 + i + i\tau \cos q\varphi_0) = 0 .$$

Обозначив  $e^{i\varphi_0} = t$ , будем иметь следующий набор решений [3, глава II]

$$t_{1m} = \left[ \frac{-1 + \sqrt{1 + \tau^2(q^2 - 1)}}{\tau(q+1)} \right]^{1/q} \exp\left( i \frac{2m\pi}{q} \right), \quad m = 0, 1, \dots, q-1, \quad (9)$$

$$t_{2m} = \left[ \frac{1 + \sqrt{1 + \tau^2(q^2 - 1)}}{\tau(q+1)} \right]^{1/q} \exp\left( i \frac{(2m+1)\pi}{q} \right), \quad m = 0, 1, \dots, q-1. \quad (10)$$

Теперь, т.к.  $\zeta = \rho(\varphi)e^{i\varphi}$  (см. (3)), то с использованием найденных решений (9) и (10) получим, что особенности аналитического продолжения волнового поля внутрь многолистика будут находиться в точках, расположенных на расстоянии

$$|\zeta_{01}| = a \frac{q \left[ q + \sqrt{1 + \tau^2(q^2 - 1)} \right]}{q^2 - 1} \left[ \frac{-1 + \sqrt{1 + \tau^2(q^2 - 1)}}{\tau(q+1)} \right]^{1/q} \quad (11)$$

от начала координат на лучах, проведенных под углами

$$\arg \zeta_{01} = \frac{2m\pi}{q}, \quad m = 0, 1, \dots, q-1 \quad (12)$$

(см. рис. 4, где через  $\zeta_{02}$  обозначены особые точки, возникающие при продолжении внутреннего поля во внешнюю область). Корни уравнения  $e^{i\varphi} = 0$  отображаются на плоскости  $z$  в бесконечно удаленную точку.

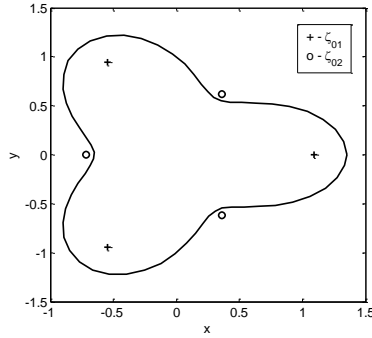


Рис. 4. Трёхлистник.

Отметим, что, например, в особых точках внутри рассеивателя (см. формулы (11), (12)) поле имеет алгебраическое ветвление  $q$ -го порядка, [3, глава II]. Точнее говоря, характер особенности в окрестности  $m$ -й особой точки ( $m = 0, 1, \dots, q-1$ ) имеет вид:

$$\frac{1}{(re^{i\varphi} - r_{0m}e^{i\varphi_{0m}})^{1-1/q}}, \quad (13)$$

где  $r, \varphi$  - полярные координаты некоторой точки в окрестности  $m$ -й, ( $m = 0, 1, \dots, q-1$ ) особой точки с координатами  $r_{0m} = |\zeta_{01}|$ ,  $\varphi_{0m} = \arg \zeta_{01}$ .

Из (13), в частности, видно, что при  $q \rightarrow \infty$  характер особенности становится близким к особенности в полюсе первого порядка. Видно также (см. (11)), что при  $\tau \rightarrow 0$  особые точки устремляются к началу координат. Таким образом, если перейти к кругу (в трехмерном случае – к сфере), т.е. одновременно устремить  $q \rightarrow \infty$  и  $\tau \rightarrow 0$ , то мы получим одну особую точку в центре, которая будет полюсом бесконечного порядка, т.е. – существенно особой точкой.

Иными словами, поле, рассеянное круговым цилиндром (сферой), может быть представлено источниками, занимающими сколь угодно малый объем, содержащий внутри начало координат (см. также представление (2а) в свете изложенного выше), либо одним источником – мультиполем бесконечного порядка в центре. Возникает естественный вопрос: почему мы видим все же, например, сферу, а не светящуюся точку в ее центре? Попытка дать ответ на этот вопрос может быть сделана лишь после рассмотрения второго множества особенностей – изображений внешних источников (особых точек).

## II. Особенности в изображениях источников

Координаты этих особенностей могут быть найдены при помощи соотношений (5), (6). Снова рассмотрим примеры их локализации для различных геометрий рассеивателей.

### 1. Эллипс.

Уравнение (5) здесь примет следующий вид:

$$\frac{be^{-i\hat{\varphi}}}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \cos^2 \hat{\varphi}}} = r_0 e^{-i\varphi_0} \equiv z^-,$$

т.е.

$$4b^2 e^{-i2\hat{\varphi}} = (z^-)^2 \left[ 4 - \varepsilon^2 (e^{i2\hat{\varphi}} + e^{-i2\hat{\varphi}} + 2) \right].$$

Решая это уравнение, получим



$$e^{-i2\hat{\varphi}} = \frac{(2-\varepsilon^2) + 2\sqrt{\frac{b^2}{(z^-)^2} - \frac{b^2}{r_0^2} \varepsilon^2 e^{i2\varphi_0}}}{\varepsilon^2 + 4\frac{b^2}{r_0^2} e^{i2\varphi_0}}.$$

Итак,

$$\zeta_{oc} = r_0 e^{-i\varphi_0} e^{i2\hat{\varphi}} = r_0 \frac{\varepsilon^2 e^{-i\varphi_0} + \left(\frac{2b}{r_0}\right)^2 e^{i\varphi_0}}{(2-\varepsilon^2) + 2\sqrt{\frac{b^2}{a^2} - \frac{b^2}{r_0^2} \varepsilon^2 e^{i2\varphi_0}}}. \quad (14)$$

Бесконечно удаленная точка отображается, как видно из (14), в начало координат.

1.а. Частный случай:  $\varepsilon = 0$  (окружность или сфера). В этом случае, как видно из (14)

$$\zeta_{oc} = \frac{b^2}{r_0} e^{i\varphi_0} -$$

изображение находится в точке инверсии, когда произведение расстояний от центра окружности (сферы) до источника и до изображения равно квадрату радиуса этой окружности (см. рис. 5).

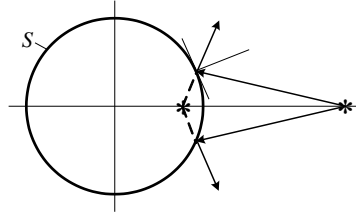


Рис. 5.

1.б. Пусть  $r_0 = b + \delta$ ,  $\varphi_0 = \pi/2$ ,  $\delta \ll b$ , т.е. источник лежит вблизи границы. Сохраняя величины порядка  $\delta$  и отбрасывая порядка  $\delta^2$ , получим:

$$\zeta_{oc} \approx ir_0 \frac{4\left(1 - 2\frac{\delta}{b}\right) - \varepsilon^2}{(2-\varepsilon^2) + 2\sqrt{\left(\frac{b}{a}\right)^2 + \varepsilon^2\left(1 - 2\frac{\delta}{b}\right)}} \approx ir_0 \frac{4 - \varepsilon^2 - 8\frac{\delta}{b}}{4 - \varepsilon^2 - 2\varepsilon^2\frac{\delta}{b}} \approx i(r_0 - 2\delta).$$

Таким образом, приближенно (с точностью до величин порядка  $(\delta/b)^2$ ) изображение находится в «зеркальной» точке, как и должно быть, исходя из зрительного опыта. При удалении источника вдоль прямой  $\varphi_0 = \pi/2$  его изображение, как видно из формулы (14), движется к межфокусному отрезку до тех пор, пока при  $r_0 = \frac{2a}{\varepsilon}$  оно не попадает в точку  $r = 0$ , лежащую на разрезе. При дальнейшем увеличении  $r_0$  изображение источника пересекает разрез (т.к. появляется при  $\varphi_0 = -\pi/2$ ), т.е. оказывается на нефизическом листе римановой поверхности. Таким образом, при  $r_0 > \frac{2a}{\varepsilon}$  множеством особенностей дифракционного поля оказывается, как и при возбуждении эллипса плоской волной, лишь межфокусный отрезок.

Важно отметить, что соотношения (5), (6) позволяют находить не только координаты изображения точечного источника, но и координаты особых точек, «порождаемых» особенностями волнового поля внутри расположенного рядом тела, например, в такой ситуации, как на рис. 6.

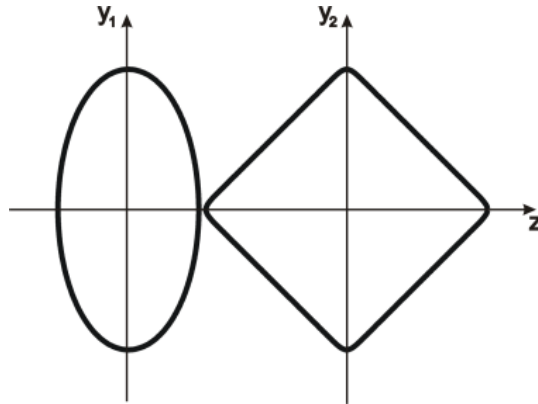


Рис. 6.

## 2. Улитка Паскаля.

Напомним ее уравнение:  $\rho(\varphi) = a + b \cos \varphi$ ,  $0 \leq b < a$ . Уравнение (5) здесь принимает следующий вид:

$$(a + b \cos \hat{\varphi}) e^{-i\hat{\varphi}} = r_0 e^{-i\varphi_0} \equiv z^-,$$

или

$$e^{-i2\hat{\varphi}} + \frac{2a}{b} e^{-i\hat{\varphi}} + \left(1 - \frac{2z^-}{b}\right) = 0,$$

откуда

$$e^{-i\hat{\varphi}} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - b^2 + 2bz^-}}{b},$$

т.е.

$$e^{i\hat{\varphi}} = \frac{b}{-a + a \sqrt{1 - \frac{b^2 + 2bz^-}{a^2}}}.$$

Здесь мы отбросили решение со знаком «-» перед корнем, т.к. оно не переходит в решение для круга при  $b = 0$ :  $e^{i\hat{\varphi}} = \frac{a}{r_0} e^{i\varphi_0}$ .

Итак,

$$\zeta_{oc} \equiv r_0 e^{-i\varphi_0} e^{i2\hat{\varphi}} = \frac{r_0 b^2 e^{-i\varphi_0}}{2a^2 - b^2 + 2r_0 b e^{-i\varphi_0} - 2a \sqrt{a^2 - b^2 + 2r_0 b e^{-i\varphi_0}}}.$$

Проверим найденное решение. Положим  $r_0 = a + b + \delta$ ,  $\varphi_0 = 0$ ,  $\delta \ll a + b$ . Снова, сохраняя величины порядка  $\delta$  и отбрасывая величины порядка  $\delta^2$ , получим:

$$\zeta_{oc} \approx \frac{b^2(a+b+\delta)}{a^2 + (a+b)^2 + 2b\delta - 2a(a+b) \left(1 + \frac{b\delta}{(a+b)^2}\right)} \approx (a+b) \frac{(a+b+\delta)}{(a+b+2\delta)},$$

или, окончательно,

$$\zeta_{oc} \approx a + b - \delta,$$

т.е., как и в случае эллипса, изображение лежит в зеркальной точке.

Из приведенных примеров мы видим, что изображение точечного источника (особой точки) можно искать при помощи метода разложения по малому параметру.

### 3. Парабола.

В качестве последнего примера рассмотрим задачу о возбуждении точечным источником (точнее – нитью тока)  $U^0(\vec{r}) = \frac{1}{4i} H_0^{(2)}(k|\vec{r} - \vec{r}_0|)$  зеркала в виде параболического цилиндра [3, глава II]. Эта задача представляет прикладной интерес, в частности, в теории антенн.

Итак, пусть поле точечного источника падает на параболу

$$y = a - bx^2. \quad (15)$$

Здесь удобнее вести рассмотрение в декартовых координатах. Введем комплексную переменную

$$\zeta = x + iy(x). \quad (16)$$

Точки, в которых нарушается взаимная однозначность отображения (16), могут быть найдены из уравнения

$$\zeta'(x) \equiv 1 + iy'(x) = 0. \quad (17)$$

В случае параболы (15) уравнение (17) принимает вид

$$1 - i2bx = 0$$

и имеет решение

$$x_0 = (1/2bi).$$

Этому решению на комплексной плоскости  $z$  соответствует особая точка

$$\zeta_0 = i \left( a - \frac{1}{4b} \right).$$

Из этой точки должен быть проведен разрез в бесконечно удаленную точку. Особой точке  $\zeta_0$  на плоскости вещественных координат  $(x, y)$  соответствует точка с координатами:

$$x_0 = 0, \quad y_0 = a - \frac{1}{4b}, \quad (18)$$

которая является фокусом параболы.

Найдем теперь координаты изображения точечного источника. При этом будем действовать в полной аналогии с изложенным выше.

Итак, снова рассмотрим выражение (теперь в декартовых координатах)

$$|\vec{r} - \vec{r}_0|^2 \Big|_S = [(x + iy(x)) - (x_0 + iy_0)][(x - iy(x)) - (x_0 - iy_0)].$$

Особенности у функции  $U^0(\vec{r})$  будут, таким образом, при

$$(\hat{x} \pm iy(\hat{x})) = (x_0 \pm iy_0) \equiv z_0^\pm.$$

Уравнению  $\zeta \equiv \hat{x} + iy(\hat{x}) = z_0^+$  соответствует на плоскости  $z = x + iy$  точка  $z_0 = x_0 + iy_0$ , которая не представляет интереса, т.к. является точкой расположения источника. Рассмотрим поэтому точку, в которой

$$\hat{x} - iy(\hat{x}) = z_0^-, \quad (19)$$

где  $\hat{x} = x_1 + ix_2$  - комплексная величина.

Равенство (19) эквивалентно следующему

$$2\hat{x}(\zeta_{oc}) - \zeta_{oc} = z_0^-, \quad (20)$$

где  $\hat{x}(\zeta)$  - решение уравнения

$$\hat{x} + iy(\hat{x}) = \zeta, \quad (21)$$

определенное всюду, кроме точек, в которых выполняется равенство (17).

Уравнение (19) перепишем следующим образом:

$$\hat{x} - ia + ib\hat{x}^2 = z_0^-.$$

Его решениями являются

$$\hat{x}(z_0^-) = \frac{i \pm i\sqrt{1 - 4ab + 4ibz_0^-}}{2b},$$

причем решение с верхним знаком является лишним, т.к. оно становится неверным при  $b = 0$ . Итак (см. (20)),

$$\begin{aligned} \zeta_{oc} &\equiv 2\hat{x}(z_0^-) - z_0^- = \frac{i - i\sqrt{1 - 4ab + 4ibz_0^-}}{b} - z_0^- = \\ &= \frac{i - b(x_0 - iy_0) - i\sqrt{1 - 4ab + 4ib(x_0 - iy_0)}}{b}. \end{aligned} \quad (22)$$

Взяв реальную и мнимую части от соотношения (22), мы получим координаты изображения точечного источника в параболическом зеркале.

Рассмотрим некоторые предельные случаи [3, глава II]. Пусть сначала  $|ab| \ll 1$ ,  $|bz_0| \ll 1$  (т.е. случай слабо искривленной поверхности). Тогда, как видно из (22),  $\zeta_{oc} = (x_0 - iy_0) + i2a$ . Таким образом, на плоскости  $(x, y)$  изображение источника будет в точке с координатами

$$x_{oc} = x_0, \quad y_{oc} = -y_0 + 2a, \quad (23)$$

т.е. там же, где оно было бы при отражении от плоскости  $y = a$ .

Аналогично при  $|bx_0| \ll 1$ ,  $|by_0| \ll 1$  (т.е. в случае, когда источник расположен вблизи поверхности) изображение снова будет в точке с координатами (23).

Сопоставляя полученный результат с теми, которые были описаны выше при рассмотрении компактных рассеивателей, можно сформулировать следующий принцип локальности: если источник расположен у выпуклой криволинейной поверхности на расстоянии, малом по сравнению с радиусом кривизны этой поверхности в рассматриваемой точке, то его изображение находится (приближенно) так же, как при отражении от касательной плоскости.

Теперь мы можем попытаться дать ответ на поставленный выше вопрос: «почему мы видим сферу, а не светящуюся точку в ее центре?». Из приведенных выше примеров понятно, что, поместив идеально отполированную сферу (разумеется, в масштабах, превышающих разрешающую способность глаза) в поле плоской волны (например, облучив лучом лазера) в помещении с поглощающими стенами, мы и в самом деле ничего, кроме светящейся точки в центре сферы не увидим. Яркость этой точки будет определяться свойствами поверхности сферы, т.е., например, идеально отполированная сфера из поглощающего материала будет в описанной ситуации восприниматься как тусклая точка. В обычной обстановке мы видим ту же, например, сферу в окружении множества других предметов, изображающихся в ней и формирующих совокупностью этих изображений зрительный образ, воспринимаемый нами как сфера. Если же поверхность сферы шероховатая, то это по существу означает, что мы имеем дело с объектом, имеющим форму, близкую к сферической с множеством особых точек на поверхности, являющихся источниками рассеянного поля. Обобщение приведенного выше рассуждения на несферические объекты позволяет в общих чертах понять «почему мы видим то, что мы видим». В самом деле, у объекта с зеркальной поверхностью источники рассеянного им поля расположены внутри объекта. Поэтому

такой объект распознается тем лучше, чем больше посторонних предметов расположены вблизи него и отображаются в нем. И наоборот, если объект имеет шероховатую поверхность, то источники рассеянного поля лежат непосредственно на этой поверхности, что делает задачу распознавания формы объекта совсем простой.

Таким образом, мы приходим к выводу, что для того, чтобы рассеиватель обладал свойствами «невидимки», т.е. был плохо распознаваемым, его форма должна быть как можно более близкой к идеальной аналитической поверхности, не иметь углов, выступов и иных иррегулярностей, а поверхность должна обладать поглощающими свойствами [2, 4].

### **Литература**

1. Колтон Д., Кресс Р. *Методы интегральных уравнений в теории рассеяния*. -М.: Мир, 1987.
2. Кюркчан А.Г., Смирнова Н.И. *Математическое моделирование в теории дифракции с использованием априорной информации об аналитических свойствах решения*. -М.: Медиа Паблишер, 2014.
3. Апельцин В.Ф., Кюркчан А.Г. *Аналитические свойства волновых полей*. -М.: МГУ, 1990.
4. Кюркчан А. Г., Стернин Б. Ю., Шаталов В. Е. Особенности продолжения волновых полей / *Успехи физических наук*. 1996. Т. 166. №12. -С. 1285-1308.
5. Sternin B., Shatalov V. *Differential Equations on Complex Manifolds*. -Dordrecht, Boston: Academic Publ., 1994.