

## Генерация сложных, в том числе хаотических колебаний в твердотельных системах

С. В. Савельев

Фрязинский филиал Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова российской академии наук; Фрязино, пл. Введенского, 1; e-mail: [savelyev@ms.ire.rssi.ru](mailto:savelyev@ms.ire.rssi.ru).

*В работе предлагается использование математической модели генератора с выделенной инерционностью для описания динамики мощного однотранзисторного усилительного каскада. Данная математическая модель исследуется с использованием основных параметров мощного отечественного транзистора 2Т982А-2. Численно выявляются закономерности генерации регулярных и хаотических колебаний. Представлены экспериментальные результаты исследования усилительного каскада для режима самовозбуждения в диапазоне СВЧ. Сделан сравнительный анализ динамики теоретической модели и эксперимента.*

*A mathematics model of a single-transistor amplifier cascade based on a powerful bipolar microwave transistor is proposed. The correspondence between the values of the model parameters and the parameters of the real device is established. The dynamics of the model in an autooscillatory mode is numerically studied with the purpose of revealing the regularities of occurrence and development of regular and chaotic oscillations. The results of experimental studies of the regenerative amplification stage in the case of self-excitation in the microwave range as applied to the theoretical model are considered.*

Смена режимов генерации в мощных транзисторных СВЧ устройствах при варьировании внутренних и внешних параметров схем, таких как согласующие элементы транзисторов или значения напряжений питания, обычно не поддается теоретическим исследованиям из-за практически непреодолимых трудностей, связанных в этих случаях с необходимостью решать уравнения в частных производных с граничными условиями, определенными только на концах полупроводниковых структур. Примером может служить [1], где в экспериментах исследуется переходы к хаотическим колебаниям при усилении бигармонического сигнала мощным усилительным каскадом на базе биполярного транзистора. В работе установлена универсальность хаотизации колебаний в полосе усилительного каскада для всех усилительных устройств регенеративного типа.

С другой стороны, в [2] приведены результаты вычисления распределения электрического поля для различных плотностей коллекторного тока, в том числе близких к максимальным, показывающие, что фактическая ширина базы биполярного транзистора есть функция плотности коллекторного тока. Наиболее важным результатом является то, что эффективная ширина базовой области увеличивается в несколько раз при достижении рабочего тока транзистора своего максимального значения. При сильных токах импедансы и коэффициент усиления транзистора в первом приближении обратно пропорциональны значению рабочего тока транзистора, что вместе с разбросом параметров мощных транзисторов, составляющих до 35%, делает бесперспективным создание точной статической модели мощного биполярного транзистора. Поэтому, для моделирования транзисторных устройств большой мощности представляет интерес проблема разработки и создания динамической модели мощного усилительного каскада.

Простейший усилительный каскад СВЧ диапазона представляет собой согласованный по входу и выходу транзистор без каких-либо дополнительных

схемных построений. Необходимое значение положительной обратной связи для перехода в режим автогенерации осуществляется через внутренние межвыводные емкости транзистора. На практике усилительный каскад переводится в автоколебательный режим по достижении необходимых значений напряжений питания.

Экспериментально известен факт, что коэффициент усиления мощного транзисторного усилительного каскада зависит в общем случае от тока коллектора. Особенно сильна эта зависимость в режиме близком к насыщению. Вблизи участка насыщения коэффициент усиления каскада быстро падает с максимального, равного 5-10 дБ для современных мощных транзисторов СВЧ, до единицы при превышении сигнала на входе усилительного каскада на 3-5 дБ относительно номинального. Динамическая характеристика в этом случае имеет линейный участок и участок с насыщением.

Особенность мощных усилительных каскадов СВЧ состоит в том, что основной режим работы транзисторов в них близок к насыщению, что при условии работы вблизи верхней граничной частоты делает значимым инерционность каскада. Это связано с тем, что заряд неосновных носителей, накапливаемый в высокоомной части коллектора транзистора, значительно превышает заряд неосновных носителей в базе, так как ширина базовой области более чем на порядок меньше ширины высокоомного коллекторного слоя. При максимальных токах, когда коллекторный переход открыт, токи полностью согласованного транзистора СВЧ в первом приближении определяются напряжениями питания. В этом случае основной вклад в инерционность вносит заряд неосновных носителей, накапливаемый в высокоомном коллекторном слое. Время заряда и время рассасывания неосновных носителей с учетом [2] можно вычислить:

$$\tau_3 = \frac{1}{\omega_N} \ln \frac{J_{EH}}{J_{EH} - 0,9 J_{CH} / h_N}, \quad (1)$$

$$\tau_p = \frac{\omega_N + \omega_J}{\omega_N \omega_J (1 - h_N h_J)} \ln \frac{J_{EH} \alpha_N}{J_{CH}}, \quad (2)$$

где  $J_{EH}$  – ток эмиттера,

$J_{CH}$  – ток коллектора в режиме насыщения,

$\omega_N$  – частота отсечки коэффициента усиления при  $h_e / h_N = 1 / \sqrt{2}$ ,

$h_N$  – нормальный коэффициент усиления по току при работе в активной области,

$h_J$  – инверсный коэффициент усиления по току и  $\omega_J$  – частота отсечки коэффициента усиления при инверсном включении.

Значения  $\tau_3$  и  $\tau_p$  в большинстве случаев одного порядка, что позволяет для простоты принять  $\tau_n \approx \tau_3 \approx \tau_p$ . Учитывая условие работы мощных транзисторов СВЧ вблизи верхней граничной частоты, параметр инерционности, определенный как:

$$g = (f \tau_n)^{-1}, \quad (3)$$

где  $f$  – рабочая частота транзистора, может принимать значения  $0,05 \leq g \leq 5$  для современных мощных транзисторов СВЧ.

Значение  $g = 5$  реализуются в регенеративных усилительных каскадах при режимах работы мощных транзисторов СВЧ, соответствующих линейному участку динамической характеристики (рис. 1) на нижнем крае своего частотного диапазона при частотах, отвечающих условию  $2\pi f \in [0,3\omega_N; 0,4\omega_N]$ . Значение  $g = 0,05$  достигается при работе транзистора на верхней рабочей частоте в режиме насыщения, когда коэффициент усиления каскада приближается единице.

Таким образом, регенеративный усилительный каскад СВЧ в режиме большого сигнала можно представить как регенеративный усилитель с инерционностью, которая определяется выходным током транзистора. Динамическая характеристика нелинейного усилителя имеет линейный участок и участок с насыщением. В качестве практической реализации динамической модели однотранзисторного регенеративного усилительного каскада положен  $RLC$  генератора с индуктивной обратной связью, схема которого приведена на рис. 1.

Параметры элементов  $RLC$  генератора соответствуют параметрам реального усилительного каскада: характеристика усилительного элемента имеет линейный участок в случае  $\Psi \leq k$  и участок с насыщением при значениях  $\Psi > k$ , где  $k$  – значение входного напряжения  $\Psi$ , разделяющего линейный участок и участок с насыщением. Инерционный преобразователь (ИП) собран по схеме однополупериодного квадратичного детектора. Варьирование коэффициента усиления нелинейного усилителя позволяет исследовать динамику системы как в недовозбужденном режиме, так и в режиме автогенерации. От известного генератора с инерционной нелинейностью, например [3], рассматриваемый  $RLC$  генератор отличается вид динамической характеристики нелинейного усилителя, которая не имеет падающего участка, и то, что ИП производит преобразование выходного сигнала нелинейного усилителя.

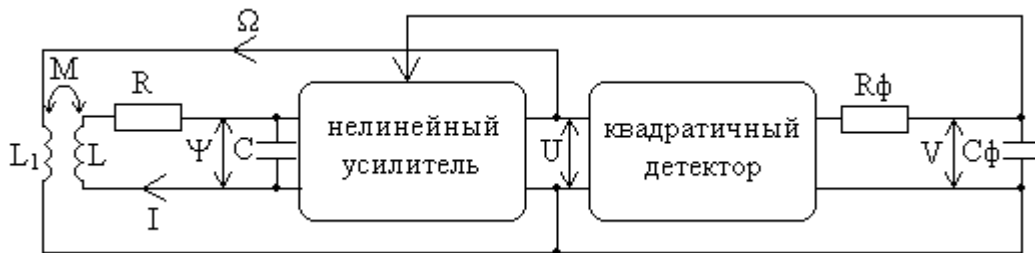


Рис. 1. Схема практической реализации модели усилительного каскада

Получим соотношения, описывающие процессы в исследуемом  $RLC$  генераторе. Для напряжения  $\Psi$  можно записать

$$\ddot{\Psi} + \frac{R}{L}\dot{\Psi} + \omega_0^2\Psi = M\omega_0^2\dot{\Omega}, \quad (4)$$

где переменная  $\Omega$  в соответствии с условиями, налагаемыми на вид динамической характеристики нелинейного усилителя, подчиняется закону

$$\Omega = \begin{cases} S\Psi, & \Psi \leq k, \\ Sk, & \Psi > k, \end{cases} \quad (5)$$

где  $S$  – крутизна линейного участка динамической характеристики.

Положим зависимость крутизны линейного участка от напряжения на выходе инерционного преобразователя  $V$  как

$$S = S_0 - \frac{b}{\omega_0^2 M} V, \quad (6)$$

где  $b$  – параметр, определяющий глубину модуляции крутизны динамической характеристики,  $\omega_0$  круговая частота.

Тогда для линейного участка характеристики,  $\Psi \leq k$ , справедливо

$$\ddot{\Psi} + \omega_0^2\Psi = (\mu - bV)\dot{\Psi} - b\dot{V}\Psi, \quad (7)$$

где  $\mu = \omega_0 MS_0 - R/L$ .

Переходя к безразмерным переменным  $\tau = \omega_0 t$ ,  $X = \Psi(b/\omega_0)^{1/2}$ ,  $Z = Vb/\omega_0$ ,  $Y = \Omega(b/\omega_0^3)^{1/2}$ , и учитывая, что  $\dot{\Omega} = -\omega_0^2 \Psi$ , уравнение (7) можно переписать как

$$\begin{aligned}\dot{X} &= Y + (m_1 - m_2)X - ZX, \\ \dot{Y} &= -X,\end{aligned}\tag{8}$$

где  $m_1 = M\omega_0 S_0$ ,  $m_2 = R(C/L)^{1/2}$  параметры возбуждения и диссипации соответственно. Аналогично, для участка с насыщением,  $\Psi > k$ , можно записать

$$\begin{aligned}\dot{X} &= Y - m_2 X - qZ, \\ \dot{Y} &= -X,\end{aligned}\tag{9}$$

где безразмерный параметр ограничения  $q = k(b/\omega_0)^{1/2}$ . Связь между входным  $U$  и выходным  $V$  напряжениями ИП представима как

$$\dot{V} = -gV + gF(U)U^2, \quad F(U) = \begin{cases} 1, & U \geq 0, \\ 0, & U < 0, \end{cases}\tag{10}$$

где  $F(U)$  единичная функция Хевисайда. Для напряжения  $U$  справедливо

$$U = L_1 \dot{\Omega} - M\dot{I},\tag{11}$$

что после подстановки в (10) с учетом условий  $W = I(b/\omega_0^3)^{1/2}$  и  $L_1 = L = M$ , позволяет записать

$$\begin{aligned}\dot{Z} &= -gZ + gF(2X - m_2 W)(2X - m_2 W)^2, \\ \dot{W} &= X - m_2 W,\end{aligned}\tag{12}$$

где  $g = RC/\tau_\phi$  – параметр инерционности,

$\tau_\phi = R_\phi C_\phi$  постоянная времени ИП.

Таким образом, используя (8,9) и (12), уравнения, описывающие динамику генератора с инерционным преобразованием выходного сигнала нелинейного усилителя, можно представить в виде четырехмерной четырёхпараметрической нелинейной диссипативной системы

$$\begin{aligned}\dot{X} &= Y + (m_1 - m_2)X - XZ, & X \leq q, \\ \dot{X} &= Y - m_2 X - qZ, & X > q, \\ \dot{Y} &= -X, \\ \dot{Z} &= -gZ + gF(2X - m_2 W)(2X - m_2 W)^2, \\ \dot{W} &= X - m_2 W,\end{aligned}\tag{13}$$

Впервые система (13) была исследована в [4], где была отмечена индивидуальность переходов «порядок – хаос» присущие этой системе и установлены их инвариантные свойства. Система уравнений (13) позволяет исследовать динамику генератора в зависимости от значений каждого параметра в отдельности. В работе приведены расчеты для автономного автоколебательного режима и ограничены выявлением областей определяющих параметров, которые характеризуются определенными видами колебаний системы, такие как предельный цикл единичной кратности периода  $T_0$ , предельные циклы с кратными периодами  $n T_0$   $n = 2, 3, \dots$ , и хаотические колебания с дифференциальным законом распределения плотности вероятности близким нормальному Гауссову. Неизменяемые параметры имели значения  $m_2 = 0,5$ ,  $q = 0,9$ . Начальные условия были выбраны  $X(0) = 0,1$ ;  $Y(0) = 0,4$ ;  $Z(0) = W(0) = 0$ . Выявление областей на

плоскости параметров  $(m_1, g)$ , характеризующихся определенными видами колебаний, производилось для ряда фиксированных значений  $m_1$  при адиабатическом изменении параметра  $g$ . На рис. 2 приведена упрощенная однопараметрическая бифуркационная диаграмма  $(X, g)$ , показывающая изменение максимальных значений переменной  $X$  при варьировании  $g$  для значения  $m_1 = 0,75$ .

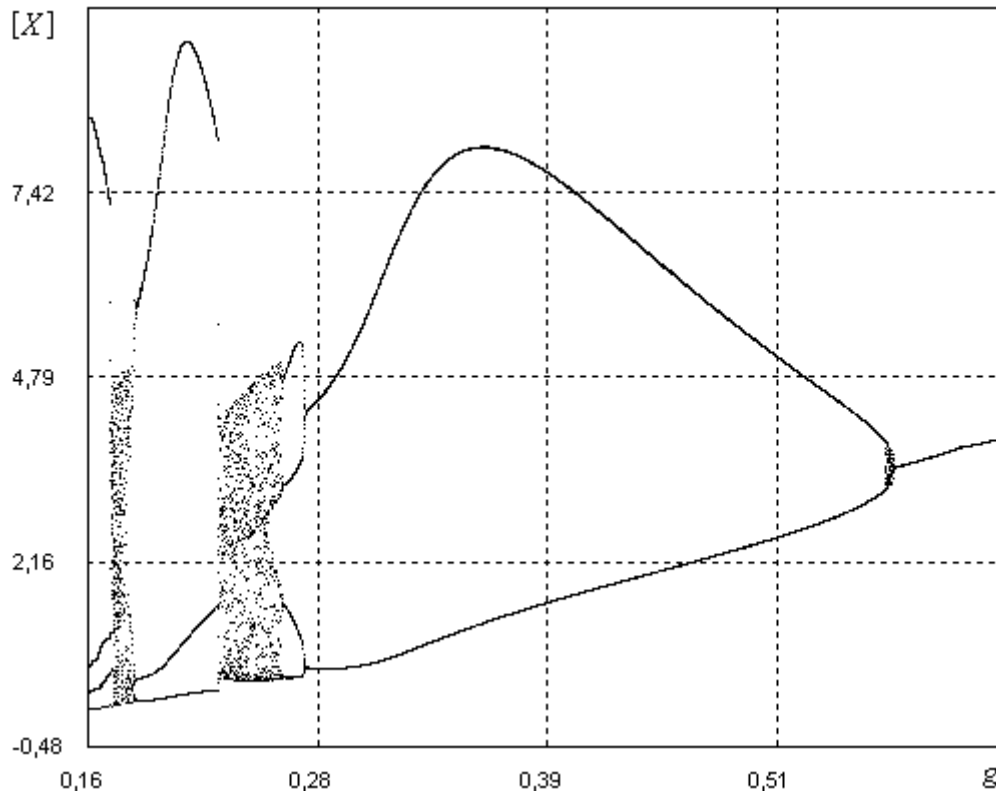
С уменьшением параметра инерционности система претерпевает ряд бифуркационных процессов. В интервале  $g \in [0,57; 0,63]$  динамика системы характеризуется устойчивым предельным циклом периода  $T_0$ . Точка  $g = 0,56$  является бифуркационной точкой. Динамика системы претерпевает удвоение периода колебаний с предельным циклом периода  $2T_0$ , существующим в интервале  $g \in [0,26; 0,56]$ . Интервалы устойчивых циклов  $T_0$  и  $2T_0$  разделены узкой зоной хаотических колебаний. По достижении значения  $g = 0,24$  система переходит к движению с устойчивым циклом периода  $3T_0$ . Зоны двухтактного и трехтактного цикла разделены зоной хаотических колебаний при  $g \in [0,24; 0,26]$ . Дальнейшее уменьшение параметра инерционности приводит к последовательной смене состояний системы в виде устойчивых предельных циклов, периоды колебаний которых последовательно увеличиваются на единицу. Зоны устойчивых состояний системы с периодами  $nT_0$  и  $(n+1)T_0$  разделены зонами хаотических колебаний. Для простоты показан бифуркационный сценарий колебаний системы вплоть до колебаний периодами  $4T_0$ . Таким образом, рассмотренная система демонстрирует аддитивное увеличение кратности периода колебаний на единицу при переходе от устойчивого периодического движения с периодом  $T_0$  к хаотическим колебаниям при изменении параметра  $g$ . При каждой последующей бифуркации расстояние между критическими значениями изменяемого параметра уменьшаются, зоны хаоса располагаются плотнее.

Такая динамика позволяет рассчитывать на существование сходимости последовательности бифуркаций с увеличением кратности устойчивых циклов системы на единицу, где ряд бифуркационных значений параметра инерционности должен подчиняться закону сходимости

$$g_k - g_n \sim n^\gamma, \quad (14)$$

где  $g_k$  и  $g_n$  бифуркационные значения параметра  $g$ ,  $\gamma$  - константа, для последовательности устойчивых предельных циклов высокого порядка.

Оценка для последовательности кратности устойчивых циклов  $n$  и ряда значений параметра инерционности  $g_n$  позволят сделать вывод о существовании закона сходимости для системы (13) с константой  $\gamma = -3,75 \pm 0,17$ . Существование закона подобия (14) позволяет рассчитать точку сгущения последовательности  $g_k$ , а значит определить верхнюю границу зоны развитого хаоса рассматриваемой системы. Полученное значение параметра инерционности соответствующее верхней границе точки сгущения  $g_k = 0,068$ .



**Рис. 2. Однопараметрическая бифуркационная диаграмма на плоскости  $(X, g)$**

Для выявления статистических свойств хаотических колебаний были проведены расчеты по вычислению распределения плотности вероятности в зоне развитого хаоса. Вид гистограммы показал, что на верхней границе области развитого хаоса распределение плотности вероятности колебаний приближается к нормальному Гауссову. Статистические свойства колебаний системы в зонах хаоса расположенных между зонами устойчивых циклов системы указывают, что дифференциальный закон распределение плотности вероятности колебаний в них, близок характеристикам АЧМ сигналов. Хаотическая составляющая в этом случае мала по сравнению с регулярными частотными составляющими.

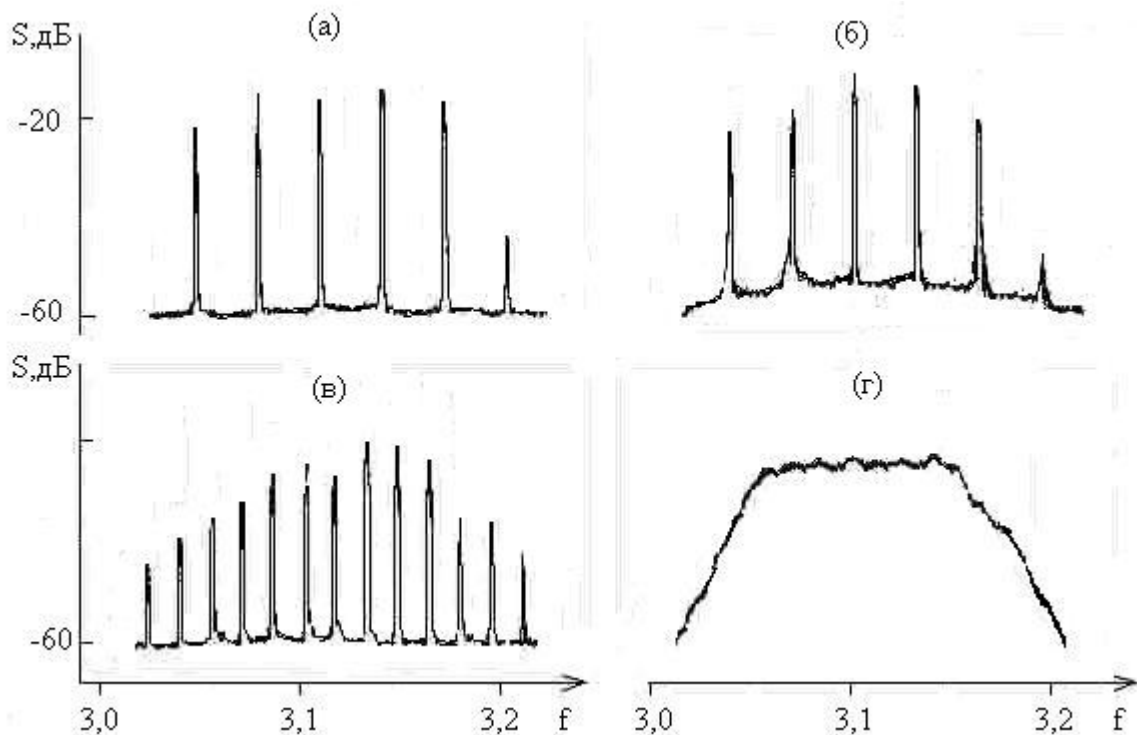
Эксперименты проводились в микроволновом диапазоне длин волн. Усилитель, переходящий в автогенераторный режим за счет изменения коэффициента усиления путем варьирования значений напряжений питания, был собран по планарной микрополосковой технологии на базе транзистора 2Т 982 А-2 включенного по схеме с общей базой и согласованного по входу и выходу. Положительная обратная связь организовывалась только за счет внутренних емкостей транзистора. Напряжения питания коллектор-база и эмиттер-база предусматривали их отдельные регулировки, что позволяло добиться максимально возможного набора автоколебательных режимов системы. Диапазон напряжений  $-1,4\text{В} < U_{эб} < -0,7\text{В}$  отвечал автогенераторным режимам усилительного каскада. Изменение значений напряжения в эксперименте  $3,6\text{В} < U_{кб} < 17,5\text{В}$  в наибольшей степени соответствовало изменению параметров инерционности и ограничения системы (13). При исследовании динамических систем в диапазоне СВЧ трудно получить все характеристики, которые обычно используются для изучения колебательных процессов в низкочастотной области: временные реализации, фазовые портреты, бифуркационные диаграммы. Наиболее распространенным методом идентификации режимов колебаний в диапазоне СВЧ является

исследование спектров мощности сигналов. Спектры в большой степени позволяют проводить идентификацию с режимами низкочастотных моделей, что позволяет более полно представить динамику системы СВЧ.

На рис. 3, а - 3, в приведен начальный фрагмент эволюции спектра мощности колебаний на выходе усилительного каскада в автогенераторном режиме для различных значений напряжений питания. Значения частоты генерируемых колебаний приведены в ГГц. Рис. 3, а демонстрирует одночастотный режим колебаний, что соответствует устойчивому предельному циклу с периодом  $T_0 = 2\pi / f_0$ ,  $f_0$  - центральная частота полосы усиления регенеративного усилительного каскада. Наличие эквидистантной сетки частот с характерным расстоянием  $\Delta f_1 = 45 \text{ МГц}$  говорит о несинусоидальном характере генерируемых колебаний. Одночастотный режим колебаний наблюдался, когда напряжения питания имеют значения  $U_{эб} \in [-0,81; -0,83] \text{ В}$ ,  $U_{кб} \in [12,3; 15,5] \text{ В}$ . В соответствии с расчетами по формулам (1) и (2) указанный вид колебаний соответствовал значениям параметра инерционности в диапазоне  $g \in [0,3; 0,6]$ . Дальнейшее уменьшение напряжений питания приводило к последовательной смене периодических движений системы. Уменьшение напряжений питания увеличивало количества спектральных составляющих в спектре выходного сигнала. Так рис. 3, в демонстрирует спектр выходного сигнала усилительного каскада цикл с периодом  $2T_0$ . Устойчивый цикл с периодом  $T_0$  и цикл с периодом  $2T_0$  разделены зоной хаоса, рис. 3, б, что выражалось в уширении оснований спектральных составляющих и наличии шумового пьедестала на уровне  $-51 \text{ дБ}$ .

В эксперименте наблюдались устойчивые циклы с кратностями периодов вплоть до  $n = 7$  включительно, разделенные зонами хаоса. Расстояния по частоте между частотными составляющими спектров выходного сигнала усилительного каскада подчинялся закону  $\Delta f_n = \Delta f_1 / n$ ,  $n = 2,3, \dots, 7$ . При смене режимов в соответствии с законом натурального ряда прослеживалась тенденция уменьшения величины области существования цикла определенной кратности на плоскости значений питающих напряжений с увеличением кратности периода. Значения напряжений питания, при которых наблюдалась смена режимов колебаний в виде цикл  $nT_0$  – хаос – цикл  $(n+1)T_0$ , находились в пределах  $U_{эб} \in [-0,8; -1,37] \text{ В}$ ,  $U_{кб} \in [6,2; 12] \text{ В}$ .

Последующее уменьшение напряжений питания приводило к полной хаотизации выходного сигнала без выделения в спектре мощности регулярных частотных составляющих. Эффективная ширина спектра хаотических колебаний была равна полосе усиления каскада в недовозбужденном режиме. Система демонстрировала движение по странному аттрактору, рис. 3, г, при  $U_{эб} \in [-1,37; -1,39] \text{ В}$ ,  $U_{кб} \in [5,9; 6,2] \text{ В}$ . Такие значения напряжений питания переводили транзистор в режим сильного насыщения, время рассасывания неосновных носителей в коллекторном слое возрастало на порядок, по сравнению с рис. 3, б. Расчетное значение параметра инерционности было  $g < 0,1$ . Спектр в диапазоне  $125 \text{ МГц}$  имел малый перепад спектральной плотности шума: при относительной ширине полосы порядка  $0,08$  октавы он не превышал  $3 \text{ дБ/мВт}$ .  $87\%$  мощности сигнала системы находилось в полосе частот усиления регенеративного усилителя. Интегральная мощность сигнала составляла  $18\%$  от мощности сигнала системы в случае регулярного сигнала с периодом единичной кратности.



**Рис. 3.** Спектры мощности автоколебаний на выходе регенеративного усилительного каскада СВЧ: устойчивый цикл  $T_0$  (а), хаос между циклами  $T_0$  и  $2T_0$  (б), устойчивый цикл  $2T_0$  (в), развитый хаос (г)

Проведенные теоретические и экспериментальные исследования позволили выявить взаимоднозначное соответствие параметров динамической модели и реальных устройств СВЧ. Сравнительный анализ математической модели и экспериментального усилительного каскада позволил установить значения определяющих параметров соответствующих последовательности устойчивых предельных циклов с аддитивным увеличением периода колебаний и хаотическим колебаниям с дифференциальным законом плотности вероятности близким к нормальному Гауссову.

### Литература

1. Беляев Р.В., Савельев С.В. Стохастичность при усилении бигармонического сигнала мощным биполярным СВЧ транзистором. // Радиотехника и Электроника. 1994. Т. 39. № 1. С. 123 - 129.
2. Зи С. Физика полупроводниковых приборов. Москва. «Мир». 1984. Книга 1. Изд. № 20/2918. Ч. 2, гл. 3, с. 190. (S.M. Sze. Physics of Semiconductor Devices. New Jersey. Bell Laboratories, Incorporated Murray Hill. 1981.)
3. Анищенко В.С., Астахов В.В., Летчфорд Т.Е. Экспериментальное исследование структуры странного аттрактора в модели генератора с инерционной нелинейностью// ЖТФ. 1983. Т. 53. В 1. С. 152 – 154.
4. Савельев С.В. Бифуркационные явления с аддитивным увеличением периода колебаний в одномодовой радиофизической системе. // Радиотехника и Электроника.. 1992. Т.37. № 6. С.1064 – 1071.
5. Савельев С. В., Сизов В. Е.. Механизм изменения энергетики однотранзисторных генераторов при переходе к шумовым колебаниям.// Журнал радиоэлектроники [электронный журнал]. 2016. №12. Режим доступа: <http://jre.cplire.ru/jre/dec16/13/abstract.html>