Инвариантная форма тензора диэлектрической проницаемости холодной ионосферной плазмы во временном представлении

А.П. Потехин, Н.В. Ильин

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт Солнечно Земной физики Сибирского отделения Российской академии наук, 634033, г.Иркутск, Лермонтова, 126А, а/я 291, e-mail: uzel@iszf.irk.ru ИСЗФ СО РАН

В докладе рассмотрено решение задачи движения заряженной частицы под действием электрического поля при наличии внешнего магнитного поля. Приведено выражение во временном представлении для тензора диэлектрической проницаемости ионосферной холодной бесстолкновительной плазмы в геомагнитном поле.

Введение

Распространение радиоволн в холодной магнитоактивной плазме, ионосфере, одно из важных направлений в проблематике распространения волн в неоднородных анизотропных средах, таких как плазма, анизотропная оптика, киральные среды и пр.

В теории распространения электромагнитных волн в неоднородной магнитоактивной плазме, которая имеет уже длительную историю, ряд задач получили существенное развитие: распространение в слоистой среде [1] квазиизотропное приближение геометрической оптики в слабозамагниченной среде [2], линейное взаимодействие собственных волн в плавно неоднородной среде [3-4]. Решение этих задач главным образом опираются на нахождение собственных (нормальных) волн в плавно неоднородной среде, которые дают асимптотическое приближение для поля в области их применимости.

Однако, требуется дальнейшее развитие этих теорий, так как многие задачи, в том числе востребованные практикой, еще требуют своего решения. Например, для слоистой модели волновода земля – ионосфера, задачи распространения радиоволн КВ диапазона решаются только для некоторых моделей геомагнитного поля, при распространении строго вдоль или строго поперек магнитного поля.

На реальных коротковолновых трассах большой протяженности геомагнитное поле направлено под самыми различными углами к направлению распространения на различных участках трассы. Формально говоря, можно ввести сопутствующую систему координат, в которой магнитное поле направлено по одной из осей, разложить в точке поле на независимые поляризационные компоненты и ввести матрицу перехода из сопутствующей системы координат к естественным координатам. При этом матрица перехода становится зависящей от координат, и уравнение распространения изменяется, появляются производные от матрицы перехода.

Выделение собственных волн в модельных задачах позволяет разделить уравнение на независимые или слабо взаимодействующие. В этом случае уравнение сводится к двум уравнениям на скалярные функции, либо это потенциалы, либо амплитуды собственных волн. Однако в случае если матрица уравнения зависит от координат, причем эта матрица в одной точке пространства не коммутирует с матрицей в других точках, уравнение не расщепляется на независимые уравнения для поляризационных компонент. Система уравнений остается связанной и ее решение, в случае если матрица системы не коммутирует с ее интегралом, не записывается в виде экспоненты от интеграла от матрицы системы [5].

Данная ситуация и реализуется в ионосферном распространении декаметровых радиоволн. Хотя в каждой точке можно диагонализовать матрицу диэлектрической проницаемости, но невозможно сделать это во всем пространстве, в котором распространяются радиоволны. При этом в волноводе как правило существует выделенная система координат, в которой среда описывается наиболее просто, поэтому для тензора диэлектрической проницаемости желательно иметь выражение, инвариантное по форме.

Модель среды

Анизотропия плазмы приводит к тому, что напряженность электрического поля E и его индукция D не коллинеарны. Материальное уравнение, связывающее напряженность с индукцией в общем случае имеют вид:

$$\vec{D}(t,\vec{r}) = \int_{-\infty}^{t} \iiint_{V} \hat{\varepsilon}(t,t',\vec{r},\vec{r}')E(t',\vec{r}')d\vec{r}'dt' \qquad (1)$$

В пренебрежении пространственной дисперсией, матрица «диэлектрической проницаемости» $\hat{\varepsilon}$ становится пропорциональна δ(r-r’) и интеграл по пространству снимается.

$$\vec{D}(t,\vec{r}) = \int_{-\infty}^{t} \hat{\varepsilon}(t,t',\vec{r})E(t',\vec{r})dt' \qquad (2)$$

В предположении стационарности среды, электромагнитная функция отклика зависит только от разности *t-t’*. Отличие матрицы $\hat{\varepsilon}$ от единичной матрицы обусловлено тем, что на заряды среды действует не только поле *E*, но и сила Лоренца со стороны внешнего магнитного поля. Вследствие этого вектор поляризации направлен в сторону, отличную от электрического поля. Обычно, выбрав направление одной из осей координат вдоль внешнего магнитного поля, матрицу $\hat{\varepsilon}$ удается диагонализовать, при этом волновое уравнение для поля или потенциала удается расщепить на независимые уравнения, описывающие собственные поляризационные состояния среды. Если же внешнее магнитное поле меняется в пространстве (неоднородно), то диагонализация также начинает зависеть от координат, и в общем случае волновое уравнение не удается разрешить в явном виде.

Для моделирования тензорной структуры $\hat{\varepsilon}$ можно рассмотреть элементарную теорию, движение заряда вблизи положения равновесия под действием электрического поля [1].

Для начала рассмотрим движение свободного заряда во внешнем магнитном поле. Решение этой задачи известно, но в постоянном поле и в специальной системе координат, в которой поле направлено по одной из осей. Мы будем искать решение в инвариантной форме, не зависящей от выбора системы координат.

1. Свободный заряд во внешнем магнитном поле.

Уравнение движения заряда под действием силы Лоренца:

$$m\ddot{\vec{r}} = \frac{e}{c}\dot{\vec{r}} \times \vec{B}$$

Запишем в матричном виде

$$\ddot{r}_i = \frac{eb}{mc} A_{ik} \dot{r}_k = \omega_H A_{ik} \dot{r}_k \qquad , \quad b = \left|\vec{B}\right| \tag{3}$$

$A_{ik} = \varepsilon_{ikl} \dfrac{B_l}{b}$, здесь ε_{ikl} абсолютно антисимметричный тензор. Зависимостью магнитного поля от координат пока пренебрегаем.

В случае неоднородного поля уравнение становится нелинейным $m\ddot{\vec{r}} = \dfrac{e}{c}\dot{\vec{r}} \times \vec{B}(r)$, будем считать, что изменения поля существенны лишь на больших расстояниях, сравнимых с радиусом земли, и разложим поле в точке расположения заряда:

$$\vec{B}(r) = \vec{B}(r_0) + (\nabla_i \vec{B}(r_0)) r_i$$

$$m\ddot{\vec{r}} = \frac{e}{c}\dot{\vec{r}} \times \vec{B}(r_0) + \frac{e}{c}\dot{\vec{r}} \times (\nabla_i \vec{B}(r_0)) r_i$$

Последнее слагаемое: $(\dot{\vec{r}} \times (\nabla_m \vec{B}(r_0)) r_m)_i = \varepsilon_{ijk} \dot{r}_j (\dfrac{\partial}{r_l} B_k) r_l$ дает нелинейность, которую можно приближенно учесть, пока же пренебрежем зависимостью геомагнитного поля от координат.

Решение (3) ищем в виде экспоненты от матрицы А:

$$\dot{r} = \exp(\omega_H t A) r_0 .$$

Если магнитное поле меняется со временем, но выполняется условия коммутации матрицы с ее интегралом, решение будет иметь вид $\dot{r} = \exp(\int_0^t \omega_H(t) A(t) dt) r_0$; по крайней мере несколько таких случаев может быть проанализировано в явном виде, например, поле постоянно по направлению, но меняется по величине, тогда матрица постоянна, меняется гирочастота, или поле вращается, оставаясь постоянным по величине.

Если матрица не коммутирует со своим интегралом по времени, решение не представимо в виде экспоненты от интеграла матрицы [5].

Экспонента от матрицы определена как

$$\exp(\alpha A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^k}{k!} A^k$$

$$A^2{}_{ij} = A_{ik} A_{kj} = \frac{1}{b^2} \varepsilon_{ikl} B_l \varepsilon_{kjm} B_m = -(\delta_{ij}\delta_{lm} - \delta_{im}\delta_{jl}) \frac{B_l B_m}{b^2} = -(\delta_{ij} \frac{B_m B_m}{b^2} - \frac{B_i B_j}{b^2}) = -\delta_{ij} + (P_B)_{ij}$$

$A^2 = -I + P_B$, I – единичная матрица, P_B - матрица проектирования на направление магнитного поля. Легко проверить, что $P_B \cdot P_B = P_B$, характерное свойство проектора.

$$A^3 = A^2 \cdot A = -A + P_B A = -A,$$

$$(P_B A)_{ij} = P_{Bik} A_{kj} = \frac{B_i B_k}{b^2} \varepsilon_{kjl} \frac{B_l}{b} = o.$$

Таким образом, ряд для экспоненты разбивается на два ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^k}{k!} A^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^{2k}}{(2k)!} A^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^{2k+1}}{(2k+1)!} A^{2k+1}$$

Все четные степени кроме нулевой содержат множитель (I - P_B), при нулевой степени только единичная матрица. Вычтем и добавим проектор P_B,после чего можно записать

$$exp(aA) = (I - P_B) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^{2k}}{(2k)!} (-1)^k + P_B + A \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^{2k+1}}{(2k+1)!} (-1)^k = \cos(a)(I - P_B) + P_B + \sin(a) A$$

Эта матрица, действуя на вектор x, дает сумму трех ортогональных векторов $x_1 = Ax \perp x, B$;

$$x_2 = (I - PB)x \perp x_1, B$$
$$x_3 = PBx \perp x_2, x_1, \parallel B$$

Поскольку $\alpha = \omega_H t$, в плоскости перпендикулярной магнитному полю происходит вращение с гирочастотой ω_H, а в направлении магнитного поля компонента скорости сохраняется. В случае постоянного по направлению, но переменного по времени поля, решение имеет вид

$$\dot{r}(t) = \exp\left(\int_0^t \omega_H(t) dt A\right) \dot{r}_0 = \left[\cos\left(\int_0^t \omega_H(t) dt\right)(I - P_B) + \sin\left(\int_0^t \omega_H(t) dt\right) A + P_B\right] \dot{r}_0.$$

Таким образом при наличии внешнего магнитного поля скорость заряда в направлении поля сохраняется, а в плоскости перпендикулярной полю, происходит вращение с меняющейся частотой.

2. Заряд во внешнем магнитном поле под действием электрического поля.

Пусть на заряд действует внешнее поле ***E(t)***, уравнение движения становится неоднородным. Решать его можно решить методом вариации постоянных, если известно решение однородного уравнения.

$$m \ddot{r}_i - \frac{eb}{c} A_{ik} \dot{r}_k = eE_i(t)$$

$$\ddot{r}_i - \omega_H A_{ik} \dot{r}_k = \frac{e}{m} E_i(t)$$

Обозначив $\dot{r}$ через ***y***, получаем уравнение первого порядка, решение однородного уравнения мы выше нашли.

$$y(t) = \exp(\omega_H tA) y_0 \qquad (4)$$

Выражение для координат частицы, имея решение для скорости, также можно написать, достаточно проинтегрировать скорость по времени.

Решение однородного уравнения для скорости

$$\dot{r} = \exp(\omega_H tA) v_0 = \cos(\omega_H t)(I - P_B) v_0 + \sin(\omega_H t) A v_0 + P_B v_0$$

интегрируя его, получаем решение однородного уравнения для координат

$$r(t) = r_0 + \int_0^t \dot{r}(t) dt = r_0 + P_B t v_0 + \frac{1}{\omega_H} \left[\sin \omega_H t (I - P_B) v_0 - (\cos \omega_H t - 1) A v_0 \right]$$

.

Неоднородное уравнение для скорости (4) решим методом вариации постоянных, то есть ищем такую зависимость начальной скорости от времени, которая обеспечит правую часть уравнения.

$$y(t) = \exp(\omega_H tA) y_0(t)$$

$$\dot{y}(t) = \omega_H A y + \exp(\omega_H tA) \dot{y}_0$$

$$\dot{y}(t) - \omega_H A y + \exp(\omega_H tA) \dot{y}_0 = \frac{e}{m} E(r,t) \Rightarrow$$

$$\dot{y}_0(t) = \frac{e}{m} \exp(-\omega_H tA) E(r,t)$$

$$y(t) = y_0 + \frac{e}{m} \int_0^t \exp(-\omega_H tA) E(r,t) dt\,. \qquad (5)$$

Отметим, что это выражение для скорости, для смещений его нужно интегрировать по времени. Зависимость от координат в (5) условна, это не зависимость от текущей координаты заряженной частицы, а указание на то, что в разных точках пространства поле вообще говоря разное, но мы пренебрегаем его изменениями на небольших смещениях частицы. Зависимость же электрического поля от времени произвольна.

$$y(t) = y_0 + \frac{e}{m} \int_0^t [\cos(\omega_H t)(I - P_B) - \sin(\omega_H t) A + P_B] E(r,t) dt \qquad (5')$$

Для постоянного поля, перпендикулярного магнитному получим:

$$y(t) = y_0 + \frac{c}{b} \left[\sin(\omega_H t) E_\perp + (\cos \omega_H t - 1) A E_\perp \right]$$

В случае малых напряженностей электрического поля, усреднение по периоду даст известное выражение для скорости дрейфа заряженной частицы

$$y_d = \frac{cAE_\perp}{b} = \frac{cE \times H}{b^2}.$$

В случае если напряженность электрического поля зависит не только от времени, но и от координат, задача становится в общем случае нелинейной, но если ее линеаризовать, то есть локально считать поле линейным по координатам:

$$\vec{E}(r) = \vec{E}(r_0) + (\nabla_i \vec{E}(r_0))r_i,$$

тем самым уравнение превращается в уравнение, аналогичное уравнению осциллятора, но с недиагональной матрицей частот, то есть матрицей коэффициентов при r, роль матрицы частот играет матрица производных поля:

$$\Omega^2_{ik} = \partial_k E_i.$$

При постоянной матрице частот и постоянном магнитном поле, задаче решается точно, даже при переменном поле $\vec{E}(r_0, t)$, но в этом случае задача с меняющимся по величине магнитным полем перестает решаться в квадратурах, уравнение движения частицы становится векторным уравнением параметрических колебаний.

3. Заряженный осциллятор во внешнем магнитном поле под действием электрического поля.

Уравнение движения осциллятора в магнитном поле, при наличии внешнего электрического поля имеет вид:

$$m\ddot{\vec{r}} + \omega^2 \vec{r} = \frac{e}{c}\dot{\vec{r}} \times \vec{B} + e\vec{E}.$$

$$\ddot{x}_i - \omega_H A_{ik}\dot{\vec{r}}_k + \omega^2{}_{ik} r_k = \frac{e}{m} E_i(t)$$

Здесь $\omega -$ матрица частот, если частота единственная, матрица кратна единичной и равна ωI.

В отсутствие правой части, уравнение движения осциллятора имеет известное решение

$\vec{r} = \cos(\omega t)\vec{r}_0 + \omega^{-1}\sin(\omega t)\dot{\vec{r}}_0$, по форме не отличающееся от скалярного, если матрица частот постоянна. Если матрица частот непостоянна, уже скалярное уравнение не решается в общем виде, хотя параметрические колебания и исследовались достаточно широко. Преобразуем уравнение

$$\ddot{\vec{r}} + \omega^2 \vec{r} - \omega_H A\dot{\vec{r}} = \frac{e}{m}\vec{E}$$

К каноническому виду. Стандартным преобразованием убираем первые производные, то есть, заменив $r = uv$, найдем матрицу ***u*** такую, чтобы коэффициент при первых производных обратился в ноль.

$$\ddot{u}v + 2\dot{u}\dot{v} + u\ddot{v} - \omega_H A(\dot{u}v + u\dot{v}) + \omega^2 uv =$$
$$u\ddot{v} + (2\dot{u} - \omega_H Au)\dot{v} + (\ddot{u} - \omega_H A\dot{u} + \omega^2 u)v \tag{6}$$

$$\dot{u} = \frac{\omega_H}{2} Au \,, \; u = e^{\frac{\omega_H}{2} At}$$

$$u\ddot{v} + (\ddot{u} - \omega_H A\dot{u} + \omega^2 u)v = u\ddot{v} + (\frac{\omega^2{}_H}{4} A^2 - \frac{\omega^2{}_H}{2} A^2 + \omega^2)uv =$$

$$\mathrm{u}[\ddot{v} + (\omega^2 I - \frac{\omega^2{}_H}{4} A^2)v]$$

Умножив на обратную матрицу, получаем

$$\ddot{v} + \Omega^2 v = u^{-1} \frac{e}{m} \vec{E}$$
$$\Omega^2 = \omega^2 I - \frac{\omega^2{}_H}{4} A^2 = \omega^2 I + \frac{\omega^2{}_H}{4}(I - P_B) = (\omega^2 + \frac{\omega^2{}_H}{4})(I - P_B) + \omega^2 P_B \tag{7}$$

Матрица частот изменилась, в плоскости перпендикулярной магнитному полю, квадрат частоты стал $\omega^2 + \frac{\omega^2{}_H}{4}$, а в направлении магнитного поля остался тем же.

Квадратный корень из матрицы частот в данном случае легко извлекается,

$$\Omega = \sqrt{\omega^2 + \frac{\omega^2{}_H}{4}}(I - P_B) + \omega P_B$$

и решение однородного уравнения имеет стандартный вид

$$v = \cos(\Omega t)v_0 - \Omega^{-1}\sin(\Omega t)\,v_1 = \cos(\omega_1 t)P_\perp v_0 - \frac{1}{\omega_1}\sin(\omega_1 t)P_\perp\, v_1 + \cos(\omega t)P_H v_0 - \frac{1}{\omega}\sin(\omega t)P_H\, v_1$$

$$\omega_1 = \sqrt{\omega^2 + \frac{\omega^2{}_H}{4}}$$

.

$P_\perp = I - P_B$ матрица проектирования на плоскость, перпендикулярную магнитному полю, v_1 - начальная скорость частицы.

Неоднородное уравнение

$$\ddot{v} + \Omega^2 v = u^{-1} \frac{e}{m} \vec{E} \tag{8}$$

будем решать методом вариации постоянных в матричной форме, полагая v_0 и v_1 зависящими от времени.

$$
\begin{aligned}
&v=\cos(\Omega t)v_0(t)-\Omega^{-1}\sin(\Omega t)v_1(t);\\
&\dot{v}=\Omega\sin(\Omega t)v_0(t)+\cos(\Omega t)v_1(t)+\cos(\Omega t)\dot{v}_0(t)-\Omega^{-1}\sin(\Omega t)\dot{v}_1(t);\\
&\ddot{v}=-\Omega^2\cos(\Omega t)v_0(t)+\Omega\sin(\Omega t)v_1(t)+\Omega\sin(\Omega t)\dot{v}_0(t)+\cos(\Omega t)\dot{v}_1(t)+\\
&\frac{d}{dt}\Big(\cos(\Omega t)\dot{v}_0(t)-\Omega^{-1}\sin(\Omega t)\dot{v}_1(t)\Big)
\end{aligned}
$$

Подставляя в уравнение (8) и приравнивая скобку под производной нолю, получаем систему уравнений

$$
\begin{cases}
\Omega\sin(\Omega t)\dot{v}_0(t)+\cos(\Omega t)\dot{v}_1(t)=u^{-1}\dfrac{e}{m}\vec{E}\\
\cos(\Omega t)\dot{v}_0(t)-\Omega^{-1}\sin(\Omega t)\dot{v}_1(t)=0
\end{cases}.
$$

Решая которую получим

$$
\begin{cases}
\dot{v}_0(t)=\sin(\Omega t)\Omega^{-1}u^{-1}\dfrac{e}{m}\vec{E}\\
\dot{v}_1(t)=\cos(\Omega t)u^{-1}\dfrac{e}{m}\vec{E}
\end{cases},
$$

$$
\begin{cases}
v_0(t)=v_0(0)+\displaystyle\int_0^t\sin(\Omega t')\Omega^{-1}u^{-1}\frac{e}{m}\vec{E}(t')dt'\\
v_1(t)=v_1(0)+\displaystyle\int_0^t\cos(\Omega t')u^{-1}\frac{e}{m}\vec{E}(\mathrm{t'})\,\mathrm{dt'}
\end{cases}
$$

Решение исходной системы при этом примет вид

$$
\begin{aligned}
&\vec{r}=u(t)v(t)=\\
&u(t)\left\{\cos(\Omega t)v_0(t)-\Omega^{-1}\sin(\Omega t)v_1(t)\right\}=\\
&u(t)\left\{\cos(\Omega t)\left(v_0(0)+\int_0^t\sin(\Omega t')\Omega^{-1}u^{-1}\frac{e}{m}\vec{E}(t')dt'\right)-\Omega^{-1}\sin(\Omega t)\left(v_1(0)+\int_0^t\cos(\Omega t')u^{-1}\frac{e}{m}\vec{E}(\mathrm{t'})\,\mathrm{dt'}\right)\right\}=\\
&u(t)\Big(\cos(\Omega t)v_0(0)-\Omega^{-1}\sin(\Omega t)v_1(0)\Big)+\int_0^t\sin(\Omega(t-t')\Omega^{-1}u(t-t')\frac{e}{m}\vec{E}(t')dt'
\end{aligned}
$$

Здесь учтено, что матрицы u(t) и Ω коммутируют друг с другом, а также с функциями от Ω, и

$$
u^{-1}(\mathrm{t})=\mathrm{u}(-\mathrm{t})=e^{-\frac{\omega_H}{2}At}=\cos(\frac{\omega_H}{2}t)P_\perp-\sin(\frac{\omega_H}{2}t)A+P_B.
$$

$$\vec r(\mathrm{t}) =$$
$$\int_0^t [\sin\omega_1(t-t')P_\perp + \sin\omega(t-t')P_H][\frac{1}{\omega_1}P_\perp + \frac{1}{\omega}P_H][\cos\frac{\omega_H}{2}(t-t')P_\perp - \sin\frac{\omega_H}{2}(t-t')A + P_B]\frac{e}{m}\vec E(t')dt' =$$
$$\frac{1}{\omega_1}\frac{e}{m}\int_0^t \sin\omega_1(t-t')\cos\frac{\omega_H}{2}(t-t')P_\perp\vec E(t')dt' -$$
$$\frac{1}{\omega_1}\frac{e}{m}\int_0^t \sin\omega_1(t-t')\sin\frac{\omega_H}{2}(t-t')A\vec E(t')dt' +$$
$$\frac{1}{\omega}\frac{e}{m}\int_0^t \sin\omega(t-t')P_B\vec E(t')dt'$$

Третье слагаемое равно стандартному отклику осциллятора на вынуждающую силу. Первые два описывают влияние магнитного поля. Обозначим

$$\begin{aligned}\vec E_1 &= P_\perp\vec E(t)\\ \vec E_2 &= A\vec E(t)\end{aligned},$$

и введем

$$\begin{aligned}\vec E_+ &= \vec E_1(t) + \mathrm{i}\,\vec E_2(t)\\ \vec E_- &= \vec E_1(t) - \mathrm{i}\,\vec E_2(t)\end{aligned}.$$

В этих обозначениях смещение осциллятора под действием поля $\vec E$ будет иметь вид

$$\vec r(\mathrm{t}) = \frac{1}{\omega_1}\frac{e}{m}\int_0^t \sin\omega_1(t-t')\cos\frac{\omega_H}{2}(t-t')\frac{\vec E_+(t') + \mathrm{i}\,\vec E_-(t')}{2}dt' -$$
$$\frac{1}{\omega_1}\frac{e}{m}\int_0^t \sin\omega_1(t-t')\sin\frac{\omega_H}{2}(t-t')\frac{\vec E_+(t') - \mathrm{i}\,\vec E_-(t')}{2i}dt' +$$
$$\frac{1}{\omega}\frac{e}{m}\int_0^t \sin\omega(t-t')P_B\vec E(t')dt'$$

$$\vec r(\mathrm{t}) = \frac{1}{2\omega_1}\frac{e}{m}\int_0^t \sin\omega_1(t-t')\exp(-i\frac{\omega_H}{2}(t-t'))\vec E_+(t')dt' -$$
$$\frac{1}{2\omega_1}\frac{e}{m}\int_0^t \sin\omega_1(t-t')\exp(i\frac{\omega_H}{2}(t-t'))\vec E_-(t')dt' +$$
$$\frac{1}{\omega}\frac{e}{m}\int_0^t \sin\omega(t-t')P_B\vec E(t')dt'$$

Поляризация объема среды, по определению есть $P = \sum_i q_i r_i$, сумма по всем заряженным частицам. В нашем случае нужно полученное смещение под действием приложенного поля умножить на концентрацию частиц данного сорта и просуммировать по сортам. Сорта частиц отличаются только массами и зарядами. Таким образом, поляризация единицы объема в точке r

$$P(r,t) = \frac{N(r,t)}{2\omega_1}\frac{e}{m}\int_0^t \sin\omega_1(t-t')\exp(-i\frac{\omega_H}{2}(t-t'))\vec{E}_+(t')dt' - \\ \frac{N(r,t)}{2\omega_1}\frac{e}{m}\int_0^t \sin\omega_1(t-t')\exp(i\frac{\omega_H}{2}(t-t'))\vec{E}_-(t')dt' + \\ \frac{N(r,t)}{\omega}\frac{e}{m}\int_0^t \sin\omega(t-t')P_B\vec{E}(t')dt'\} \quad . \tag{9}$$

Здесь $N(r,t)$ - плотность электронов в заданной точке пространства. Первое слагаемое – компонента поляризации в плоскости электрического и геомагнитного поля, перпендикулярная магнитному полю, второе слагаемое, компонента поляризации, перпендикулярная и геомагнитному и электрическому полю, третье – компонента в направлении геомагнитного поля. Индукция при этом

$$\vec{D}(r,t) = \vec{E}(r,t) + 4\pi\vec{P}(r,t) = \int_0^t \hat{\varepsilon}(r,t-t')E(r,t')dt' .$$

Работа выполнена в рамках базового финансирования программы ФНИ II.12 и при поддержке гранта РФФИ №19-02-00513-а.

Литература

1. Гинзбург В.Л. Распространение электромагнитных волн в плазме. — М.: Наука, 1967. — 685с.
2. Кравцов Ю.А. “Квазиизотропное” приближение геометрической оптики // Докл. АН СССР. — 1968. —Т. 183, № 2. — С. 74–76.
3. Железняков В.В., Кочаровский В.В., Кочаровский Вл.В. Линейное взаимодействие электромагнитных волн в неоднородных слабо анизотропных средах // Успехи физических наук. — 1983. — Т. 141, № 2. — С. 295–298
4 Шалашов А.Г, Господчиков Е.Д. Импедансный метод решения задач распространения электромагнитных волн в анизотропных и гиротропных средах // Успехи физических наук. — 2011. — Т.181, № 2. — С. 151–172.
5. Лаппо-Данилевский И.А. Теория функций от матриц и системы линейных дифференциальных уравнений. — М.: ОНТИ. Гос. технико-теорет. изд-во, 1934. — 144 с.