

Дифракция электромагнитного вихревого бесселева пучка на продольно замагниченном плазменном цилиндре конечной длины

В.А. Еськин, А.В. Кудрин

*Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского,
603950, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23
E-mail: vasilij.eskin@gmail.com*

Рассмотрена задача о дифракции электромагнитного вихревого бесселева пучка на электрически тонком, продольно замагниченном плазменном цилиндре конечной длины, расположенном в свободном пространстве. С использованием разложений поля по собственным функциям в области пространства между плоскостями торцов цилиндра и вне неё получена и решена численно система интегральных уравнений для коэффициентов этих разложений. Применительно к радиочастотному диапазону изучена зависимость диаграммы направленности рассеянного излучения от параметров плазменного цилиндра.

The problem of diffraction of an electromagnetic vortex Bessel beam by an electrically narrow axially magnetized finite-length plasma cylinder located in free space is considered. The field in the spatial region between the planes of the cylinder endfaces and outside this region are represented using the eigenfunction expansion technique. A system of integral equations for the expansion coefficients is obtained and numerically solved. For the radio-frequency range, the scattering pattern as a function of the plasma-cylinder parameters is studied.

Введение

В настоящее время значительный интерес вызывают возможности применения электромагнитных вихревых пучков. Со времени публикации работы [1], посвященной исследованию лазерного луча с орбитальным угловым моментом, достигнут значительный прогресс в развитии физики вихревых пучков. Как известно, электромагнитные вихревые пучки обладают степенью свободы, называемой орбитальным угловым моментом, с бесконечным числом значений, в отличие от поляризационной степени свободы, имеющей только два значения. Это свойство вихревых пучков может быть использовано для манипулирования микрочастицами, увеличения пропускной способности линий передачи, работающих в радио- или оптическом диапазонах частот [2], повышения надежности квантовой криптографии [3], диагностики ионосферной плазмы [4] и т.д. Для ряда приложений, например, уплотнения канала передачи данных, необходимо разделять пучок на выходе линии передачи на волны с разными орбитальными угловыми моментами и, соответственно, разными топологическими зарядами, что можно обеспечить с помощью гиротропных цилиндрических рассеивателей [5].

В данной работе в рамках строгого электродинамического подхода рассматривается задача о дифракции электромагнитного вихревого бесселева пучка на цилиндре конечной длины, заполненном магнитоактивной плазмой. Для решения этой задачи поля в различных пространственных областях представляются в виде разложений по собственным волнам, что позволяет свести задачу к отысканию коэффициентов разложения поля.

Постановка задачи и основные соотношения

Рассмотрим дифракцию монохроматического ($\sim \exp(i\omega t)$) электромагнитного вихревого бesselова пучка с циклической частотой ω на круговом плазменном цилиндре радиуса a и длины L , окружённого свободным пространством, в случае, когда оси симметрии пучка и цилиндра совпадают. Цилиндр ориентирован параллельно оси z цилиндрической системы координат (ρ, φ, z) . Торцы цилиндра расположены в плоскостях $z=0$ и $z=L$. Примем, что внешнее постоянное магнитное поле \mathbf{B}_0 направленно вдоль оси рассеивателя. В этом случае плазма внутри цилиндра описывается тензором диэлектрической проницаемости

$$\hat{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon & -ig & 0 \\ ig & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \eta \end{pmatrix}, \quad (1)$$

компоненты которого даются следующими выражениями:

$$\varepsilon = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_H^2}, \quad g = \frac{\omega_p^2 \omega_H}{(\omega^2 - \omega_H^2)\omega}, \quad \eta = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}. \quad (2)$$

Здесь ω_H и ω_p – гирочастота и плазменная частота электронов соответственно. Заметим, что компоненты тензора (2) записаны при пренебрежении вкладом ионов. Данное приближение справедливо при выполнении условия $\omega \gg \omega_{\text{ЛН}}$ [6], которое считается выполненным в настоящей работе (здесь $\omega_{\text{ЛН}}$ – частота нижнего гибридного резонанса).

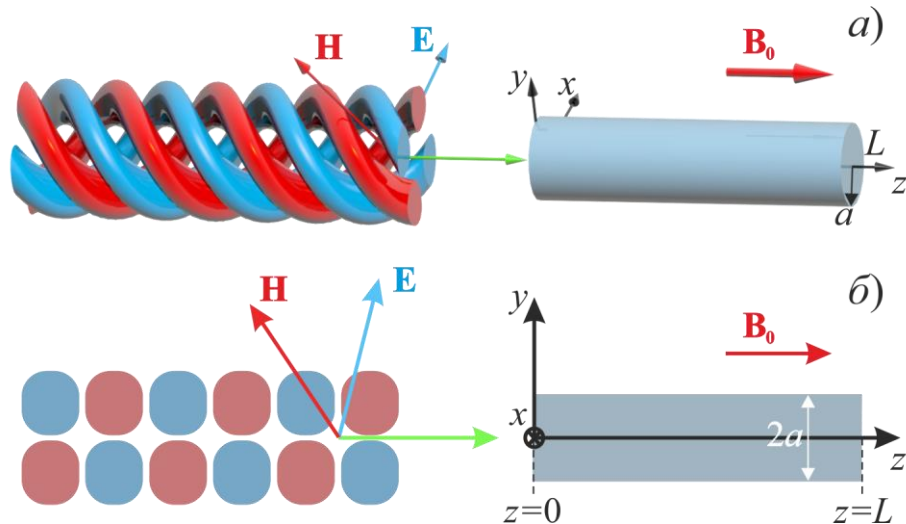


Рис.1. Геометрия задачи в стереометрическом представлении (а) и в сечении $x=0$ (б)

Как следует из симметрии задачи, при наличии замагниченного плазменного столба продольные компоненты полей могут быть представлены в следующем виде:

$$\begin{bmatrix} E_{z;s,m}(\mathbf{r}, q) \\ H_{z;s,m}(\mathbf{r}, q) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{z;s,m}(\rho, q) \\ H_{z;s,m}(\rho, q) \end{bmatrix} \exp[-im\varphi - ik_0 p_s(q)z], \quad (3)$$

где q – поперечное волновое число в свободном пространстве, нормированное на волновое число $k_0 = \omega/c$ (здесь c – скорость света в вакууме), m – азимутальный индекс ($m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), функция $p_s(q)$ описывает зависимость нормированного (на k_0) продольного волнового числа от q в свободном пространстве, индекс s обозначает направление распространения волн ($s = -$ и $s = +$ отмечают распространение в отрицательном и положительном направлениях оси z соответственно), $E_{z;s,m}(\rho, q)$ и $H_{z;s,m}(\rho, q)$ – функции, описывающие радиальное распределение продольных компонент волн с поперечным волновым числом q и индексами m и s . Функции $p_+(q)$ и $p_-(q)$ подчиняются соотношению $p_+(q) \equiv p(q) = -p_-(q)$, где $p(q) = (1 - q^2)^{1/2}$. При этом предполагается, что $\text{Im} p(q) < 0$ (по крайней мере, при наличии потерь в среде). В отсутствии потерь для чисто действительной функции $p(q)$ её ветвь выбирается таким образом, чтобы выполнялось условие $\text{Re} p(q) > 0$. Далее, для краткости, аргумент функции $p_s(q)$, опускаем там, где это не приводит к недоразумениям.

Продольные компоненты полей $E_{z;s,m}$ и $H_{z;s,m}$ в плазменной среде удовлетворяют следующей системе дифференциальных уравнений [6]:

$$\begin{aligned} \hat{L}_m E_{z;s,m} - k_0^2 \frac{\eta}{\varepsilon} (p_s^2 - \varepsilon) E_{z;s,m} &= -ik_0^2 \frac{g}{\varepsilon} p_s H_{z;s,m}, \\ \hat{L}_m H_{z;s,m} - k_0^2 \left(p_s^2 + \frac{g^2}{\varepsilon} - \varepsilon \right) H_{z;s,m} &= ik_0^2 \frac{g}{\varepsilon} \eta p_s E_{z;s,m}, \end{aligned} \quad (4)$$

где

$$\hat{L}_m = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{m^2}{\rho^2}.$$

Поперечные компоненты полей $E_{\rho;s,m}$, $E_{\varphi;s,m}$, $H_{\rho;s,m}$ и $H_{\varphi;s,m}$ могут быть выражены через продольные компоненты следующим образом [6]:

$$\begin{aligned} E_{\rho;s,m} &= A \left\{ ip_s g \frac{m}{\rho} E_{z;s,m} + ip_s (\varepsilon - p_s^2) E'_{z;s,m} + (\varepsilon - p_s^2) \frac{m}{\rho} H_{z;s,m} + g H'_{z;s,m} \right\}, \\ E_{\varphi;s,m} &= A \left\{ p_s (\varepsilon - p_s^2) \frac{m}{\rho} E_{z;s,m} + p_s g E'_{z;s,m} - ig \frac{m}{\rho} H_{z;s,m} - i(\varepsilon - p_s^2) H'_{z;s,m} \right\}, \\ H_{\rho;s,m} &= A \left\{ [g^2 - \varepsilon(\varepsilon - p_s^2)] \frac{m}{\rho} E_{z;s,m} - p_s^2 g E'_{z;s,m} + ip_s g \frac{m}{\rho} H_{z;s,m} + ip_s (\varepsilon - p_s^2) H'_{z;s,m} \right\}, \\ H_{\varphi;s,m} &= A \left\{ ip_s^2 g \frac{m}{\rho} E_{z;s,m} - i[g^2 - \varepsilon(\varepsilon - p_s^2)] E'_{z;s,m} + p_s (\varepsilon - p_s^2) \frac{m}{\rho} H_{z;s,m} + p_s g H'_{z;s,m} \right\}, \end{aligned} \quad (5)$$

где $A = k_0^{-1} [g^2 - (p_s^2 - \varepsilon)^2]^{-1}$,

штрих обозначает производную по координате ρ .

Уравнения для продольных компонент полей, равно как и выражения для соответствующих поперечных компонент вне плазменного цилиндра, могут быть получены из (4) и (5) с помощью подстановок $\varepsilon = 1$, $g = 0$ и $\eta = 1$.

Без потери общности продольные компоненты поля в падающем пучке могут быть записаны в следующем виде:

$$\begin{aligned} E_z^{(i)}(\mathbf{r}) &= A^{(1)} q_0 J_m(k_0 q_0 \rho) \exp[-i(m\varphi + k_0 p_0 z)], \\ H_z^{(i)}(\mathbf{r}) &= A^{(2)} q_0 J_m(k_0 q_0 \rho) \exp[-i(m\varphi + k_0 p_0 z)]. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь J_m – функция Бесселя, m – топологический заряд пучка, p_0 и q_0 – нормированные (на k_0) продольное и поперечное волновые числа в падающем пучке соответственно, $A^{(1)}$ и $A^{(2)}$ – амплитудные коэффициенты, индекс (i) отмечает падающее поле. Заметим, что рассмотренный пучок является E -поляризованным, если $A^{(1)} \neq 0$ и $A^{(2)} = 0$, и H -поляризованным при $A^{(1)} = 0$ и $A^{(2)} \neq 0$. Как следует из симметрии задачи, дифрагированное поле может содержать только одну угловую гармонику, азимутальный индекс которой совпадает с топологическим зарядом падающего пучка.

В свободном пространстве электромагнитное поле может быть разложено по волнам непрерывного спектра следующим образом:

$$\begin{bmatrix} E_z^{(f)}(\mathbf{r}) \\ H_z^{(f)}(\mathbf{r}) \end{bmatrix} = \sum_{s=-\infty}^{\infty} \sum_{\alpha=1}^2 \int_0^{\infty} a_{s,m,\alpha}(q) \begin{bmatrix} E_{z;s,m,\alpha}^{(f)}(\rho, q) \\ H_{z;s,m,\alpha}^{(f)}(\rho, q) \end{bmatrix} e^{-im\varphi - ik_0 p_s(q)z} dq, \quad (7)$$

где $a_{s,m,\alpha}(q)$ – коэффициенты разложения, $\alpha = 1$ и $\alpha = 2$ отвечают волнам E - и H -поляризации соответственно. Здесь функции распределения поля по поперечной координате $E_{z;s,m,\alpha}^{(f)}$ и $H_{z;s,m,\alpha}^{(f)}$ задаются для волн E -поляризации формулами:

$$E_{z;s,m,1}^{(f)}(\rho, q) = q J_m(k_0 q \rho), \quad H_{z;s,m,1}^{(f)}(\rho, q) = 0, \quad (8)$$

а для волн H -поляризации – формулами:

$$E_{z;s,m,2}^{(f)}(\rho, q) = 0, \quad H_{z;s,m,2}^{(f)}(\rho, q) = q J_m(k_0 q \rho). \quad (9)$$

Продольные компоненты поля рассеянных назад волн в области $z < 0$ будем искать в виде:

$$\begin{bmatrix} E_z^{(r)}(\mathbf{r}) \\ H_z^{(r)}(\mathbf{r}) \end{bmatrix} = \sum_{\alpha=1}^2 \int_0^{\infty} a_{-,m,\alpha}(q) \begin{bmatrix} E_{z;-m,\alpha}^{(f)}(\rho, q) \\ H_{z;-m,\alpha}^{(f)}(\rho, q) \end{bmatrix} e^{-im\varphi + ik_0 p(q)z} dq, \quad (10)$$

где индекс (r) отмечает отражённые назад волны.

Компоненты полей рассеянных вперёд волн в области $z > L$ представим аналогичным образом:

$$\begin{bmatrix} E_z^{(t)}(\mathbf{r}) \\ H_z^{(t)}(\mathbf{r}) \end{bmatrix} = \sum_{\alpha=1}^2 \int_0^{\infty} a_{+,m,\alpha}(q) \begin{bmatrix} E_{z;+,m,\alpha}^{(f)}(\rho, q) \\ H_{z;+,m,\alpha}^{(f)}(\rho, q) \end{bmatrix} e^{-im\varphi - ik_0 p(q)z} dq, \quad (11)$$

где индекс (t) отмечает волны, уходящие вперёд.

Поле в области $0 < z < L$ будем записывать в виде разложения по собственным волнам бесконечно длинного замагниченного плазменного цилиндра, параметры которого совпадают с параметрами рассеивателя. Далее будем отмечать компоненты полей таких волн индексом (c) . Напомним, что набор собственных волн, указанного волновода, содержит волны как дискретной, так и непрерывной части пространственного спектра.

Внутри плазменного цилиндра ($\rho < a$) функции $E_{z;s,m,\beta}^{(c)}(\rho, q)$ и $H_{z;s,m,\beta}^{(c)}(\rho, q)$, которые описывают продольные компоненты полей волн непрерывного спектра, представляются в виде [6]:

$$\begin{aligned} E_{z;s,m,\beta}^{(c)} &= -\frac{i\varepsilon}{p_s g \eta} \sum_{k=1}^2 B_{s,m,\beta}^{(k)}(q) \left(p_s^2 + q_k^2 + \frac{g^2}{\varepsilon} - \varepsilon \right) q_k J_m(k_0 q_k \rho), \\ H_{z;s,m,\beta}^{(c)} &= -\sum_{k=1}^2 B_{s,m,\beta}^{(k)}(q) q_k J_m(k_0 q_k \rho), \end{aligned} \quad (12)$$

где $B_{s,m,\beta}^{(1)}(q)$ и $B_{s,m,\beta}^{(2)}(q)$ – амплитудные коэффициенты, q_1 и q_2 – поперечные волновые числа двух нормальных волн в магнитоактивной плазме, которые соответствуют продольному волновому числу $p = p_s(q)$, $s = \pm$, индекс $\beta = 1, 2$ обозначает тип волн непрерывного спектра (см. [7]). Выражения для q_1 и q_2 можно найти в работе [6].

Во внешней области ($\rho > a$) плазменного цилиндра, функции $E_{z;s,m,\beta}^{(c)}(\rho, q)$ и $H_{z;s,m,\beta}^{(c)}(\rho, q)$ могут быть записаны следующим образом:

$$\begin{aligned} E_{z;s,m,\beta}^{(c)} &= q C_{s,m,\beta}(q) \left[H_m^{(2)}(k_0 q \rho) + \psi_{s,m,\beta}(q) H_m^{(1)}(k_0 q \rho) \right], \\ H_{z;s,m,\beta}^{(c)} &= q D_{s,m,\beta}(q) \left[H_m^{(2)}(k_0 q \rho) - \psi_{s,m,\beta}(q) H_m^{(1)}(k_0 q \rho) \right], \end{aligned} \quad (13)$$

где $H_m^{(1)}$ и $H_m^{(2)}$ – функции Ханкеля первого и второго рода соответственно, $C_{s,m,\beta}$ и $D_{s,m,\beta}$ – амплитудные коэффициенты поля вне цилиндра.

Напомним, что поля волн непрерывного спектра удовлетворяют на бесконечности следующему условию $\rho \rightarrow \infty$ [8]:

$$\rho^{1/2} |E_{z;s,m,\beta}^{(c)}(\rho, q)| < R_m^{(1)}, \quad \rho^{1/2} |H_{z;s,m,\beta}^{(c)}(\rho, q)| < R_m^{(2)}, \quad (14)$$

где $R_m^{(1)}$ и $R_m^{(2)}$ – некоторые конечные постоянные. В силу условий (14) поперечное волновое число q может быть лишь чисто действительным. Кроме того, нетрудно

показать, что отрицательные значения q не дают новых решений по сравнению с положительными значениями q . Поэтому достаточно рассмотреть только положительные поперечные волновые числа. Величины $\psi_{s,m,1}(q)$ и $\psi_{s,m,2}(q)$ в (13) являются решениями квадратного уравнения, которое получается относительно $\psi_{s,m,\beta}(q)$ из требования равенства нулю детерминанта системы линейных уравнений для коэффициентов $B_{s,m,\beta}^{(1,2)}$, $C_{s,m,\beta}$ и $D_{s,m,\beta}$. Эта система линейных уравнений следует из условий непрерывности компонент $E_{\varphi;s,m,\beta}^{(c)}$, $E_{z;s,m,\beta}^{(c)}$, $H_{\varphi;s,m,\beta}^{(c)}$ и $H_{z;s,m,\beta}^{(c)}$ на поверхности цилиндра $\rho = a$ при чисто действительных значениях величины q .

Далее, для более компактного представления продольных компонент полей волн непрерывного спектра, будем их записывать в виде:

$$\begin{bmatrix} E_{z;s,m,\beta}^{(c)}(\mathbf{r}, q) \\ H_{z;s,m,\beta}^{(c)}(\mathbf{r}, q) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{z;s,m,\beta}^{(c)}(\rho, q) \\ H_{z;s,m,\beta}^{(c)}(\rho, q) \end{bmatrix} e^{-i(m\varphi + k_0 p_s z)}. \quad (15)$$

Соответственно, продольные компоненты волн дискретной части спектра, т.е. собственных мод плазменного цилиндра, будем обозначать как

$$\begin{bmatrix} E_{z;s,m,n}^{(c)}(\mathbf{r}) \\ H_{z;s,m,n}^{(c)}(\mathbf{r}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{z;s,m,n}^{(c)}(\rho) \\ H_{z;s,m,n}^{(c)}(\rho) \end{bmatrix} e^{-i(m\varphi + k_0 p_{s,m,n} z)}, \quad (16)$$

где функции $E_{z;s,m,n}^{(c)}(\rho) = E_{z;s,m,\beta}^{(c)}(\rho, q_{m,n})$ и $H_{z;s,m,n}^{(c)}(\rho) = H_{z;s,m,\beta}^{(c)}(\rho, q_{m,n})$ описывают поперечное распределение поля моды волновода с индексами s, m, n и постоянной распространения $p_{s,m,n} = p_s(q_{m,n})$. Последняя определяется таким образом, что $p_{s,m,n} = p_{m,n}$ для $s = +$ и $p_{s,m,n} = -p_{m,n}$ для $s = -$. Здесь величины $q_{m,n}$ являются корнями уравнения $\psi_{s,m,\beta}(q_{m,n}) = 0$ при выполнении условия $\text{Im} q_{m,n} < 0$.

Можно убедиться, что поля волн дискретной и непрерывной частей пространственного спектра удовлетворяют соотношениям ортогональности (подробности см. в [6–8]), вытекающим из «транспонированной» леммы Лоренца. На основе этих соотношений можно получить нормы для волн непрерывного спектра замагниченного плазменного цилиндра в следующем виде:

$$N_{s,m,\beta}(q) = \frac{4c}{k_0^2} \frac{p_s}{q} (-1)^{m+1} \psi_{s,m,\beta}(q) \left[\left(C_{s,m,\beta}(q) \right)^2 + \left(D_{s,m,\beta}(q) \right)^2 \right]. \quad (17)$$

Выражение для нормы $N_{s,m,n}$ волн дискретной части спектра, которое не представлено здесь для краткости, приведено в [7].

Таким образом, продольные компоненты поля в области $0 < z < L$ представляются в следующем виде:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} E_z^{(c)}(\mathbf{r}) \\ H_z^{(c)}(\mathbf{r}) \end{bmatrix} = \sum_{s=-}^{+} \left(\sum_n b_{s,m,n} \begin{bmatrix} E_{z;s,m,n}^{(c)}(\rho) \\ H_{z;s,m,n}^{(c)}(\rho) \end{bmatrix} e^{-ik_0 p_{s,m,n} z} + \right. \\ \left. + \sum_{\beta=1}^2 \int_0^{\infty} b_{s,m,\beta}(q) \begin{bmatrix} E_{z;s,m,\beta}^{(c)}(\rho, q) \\ H_{z;s,m,\beta}^{(c)}(\rho, q) \end{bmatrix} e^{-ik_0 p_s(q) z} dq \right) e^{-im\varphi}. \end{aligned} \quad (18)$$

Здесь $b_{s,m,n}$ и $b_{s,m,\beta}(q)$ – коэффициенты разложения для волн дискретной и непрерывной частей спектра соответственно.

Используя условия непрерывности тангенциальных компонент полей на входном торце цилиндра ($z=0$)

$$\begin{aligned} E_{\varphi}^{(i)} + E_{\varphi}^{(r)} = E_{\varphi}^{(c)}, \quad H_{\varphi}^{(i)} + H_{\varphi}^{(r)} = H_{\varphi}^{(c)}, \\ E_{\rho}^{(i)} + E_{\rho}^{(r)} = E_{\rho}^{(c)}, \quad H_{\rho}^{(i)} + H_{\rho}^{(r)} = H_{\rho}^{(c)}, \end{aligned} \quad (19)$$

а также соотношения ортогональности, получаем следующие интегральные уравнения для коэффициентов разложения:

$$\begin{aligned} a_{-,m,\alpha}(q) \tilde{N}_{-,m,\alpha}(q) = - \sum_{s=-}^{+} \left(\sum_{\beta=1}^2 \int_0^{\infty} b_{s,m,\beta}(\tilde{q}) K_{\alpha,+,-m}^{\beta,s,m}(\tilde{q}, q) d\tilde{q} + \sum_n b_{s,m,n} K_{\alpha,+,-m}^{n,s,m}(q) \right) - \\ - \sum_{\beta=1}^2 b_{-,m,\beta}(q) M_{-, \beta, \alpha, m}(q), \\ b_{+,m,n} N_{+,m,n} = \sum_{\alpha=1}^2 \int_0^{\infty} a_{-,m,\alpha}(\tilde{q}) K_{\alpha,-,m}^{n,-,m}(\tilde{q}) d\tilde{q} + \sum_{\gamma=1}^2 A^{(\gamma)} \hat{K}_{\gamma,+ ,m}^{n,-,m}(q_0), \\ b_{+,m,\beta}(q) N_{+,m,\beta}(q) = \sum_{\alpha=1}^2 \int_0^{\infty} a_{-,m,\alpha}(\tilde{q}) K_{\alpha,-,m}^{\beta,-,m}(q, \tilde{q}) d\tilde{q} + \\ + \sum_{\gamma=1}^2 A^{(\gamma)} \left[M_{+, \beta, \gamma, m}(q) \delta(q - q_0) + \hat{K}_{\gamma,+ ,m}^{\beta,-,m}(q, q_0) \right]. \end{aligned} \quad (20)$$

Здесь норма волн непрерывного спектра свободного пространства записывается в виде

$$\tilde{N}_{s,m,\alpha}(q) = (-1)^{m+\alpha} c p_s / (k_0^2 q), \quad (21)$$

индекс γ обозначает поляризацию падающего пучка. Остальные величины в интегральных уравнениях (20) даются при условии $z=0$ следующими выражениями:

$$\begin{aligned}
K_{\alpha,\tilde{s},m}^{\beta,s,-m}(q,\tilde{q}) &= I_{\alpha,\tilde{s},m}^{\beta,s,-m} + J_{\alpha,\tilde{s},m}^{\beta,s,-m}, & K_{\alpha,\tilde{s},-m}^{\beta,s,m}(q,\tilde{q}) &= I_{\alpha,\tilde{s},-m}^{\beta,s,m} + J_{\alpha,\tilde{s},-m}^{\beta,s,m}, \\
I_{\alpha,\tilde{s},m}^{\beta,s,-m} &= W_{s,\tilde{s}}(q,\tilde{q}) \left[\mathbf{E}_{\tilde{s},m,\alpha}^{(f)}(\mathbf{r},\tilde{q}) \times \hat{\mathbf{H}}_{s,-m,\beta}^{(c)}(\mathbf{r},q) - \hat{\mathbf{E}}_{s,-m,\beta}^{(c)}(\mathbf{r},q) \times \mathbf{H}_{\tilde{s},m,\alpha}^{(f)}(\mathbf{r},\tilde{q}) \right] \mathbf{\rho}_0 |_{\rho=a}, \\
J_{\alpha,\tilde{s},m}^{\beta,s,-m} &= \frac{c}{2} \int_0^a \left[\mathbf{E}_{\tilde{s},m,\alpha}^{(f)}(\mathbf{r},\tilde{q}) \times \hat{\mathbf{H}}_{s,-m,\beta}^{(c)}(\mathbf{r},q) - \hat{\mathbf{E}}_{s,-m,\beta}^{(c)}(\mathbf{r},q) \times \mathbf{H}_{\tilde{s},m,\alpha}^{(f)}(\mathbf{r},\tilde{q}) \right] \mathbf{z}_0 \rho d\rho, & (22) \\
I_{\alpha,\tilde{s},-m}^{\beta,s,m} &= W_{s,\tilde{s}}(q,\tilde{q}) \left[\mathbf{E}_{\tilde{s},-m,\alpha}^{(f)}(\mathbf{r},\tilde{q}) \times \mathbf{H}_{s,m,\beta}^{(c)}(\mathbf{r},q) - \mathbf{E}_{s,m,\beta}^{(c)}(\mathbf{r},q) \times \mathbf{H}_{\tilde{s},-m,\alpha}^{(f)}(\mathbf{r},\tilde{q}) \right] \mathbf{\rho}_0 |_{\rho=a}, \\
J_{\alpha,\tilde{s},-m}^{\beta,s,m} &= \frac{c}{2} \int_0^a \left[\mathbf{E}_{\tilde{s},-m,\alpha}^{(f)}(\mathbf{r},\tilde{q}) \times \mathbf{H}_{s,m,\beta}^{(c)}(\mathbf{r},q) - \mathbf{E}_{s,m,\beta}^{(c)}(\mathbf{r},q) \times \mathbf{H}_{\tilde{s},-m,\alpha}^{(f)}(\mathbf{r},\tilde{q}) \right] \mathbf{z}_0 \rho d\rho, \\
W_{s,\tilde{s}}(q,\tilde{q}) &= i \frac{c}{2} \frac{a}{k_0(p_{\tilde{s}}(\tilde{q}) + p_s(q))}, \\
M_{s,\beta,\gamma,m}(q) &= (-1)^{m+1} \frac{c}{k_0^2} \frac{p_s}{q} \left\{ C_{s,m,\beta}(q) [1 + \psi_{s,m,\beta}(q)] \delta_{1,\gamma} + \right. \\
&\quad \left. + D_{s,m,\beta}(q) [\psi_{s,m,\beta}(q) - 1] \delta_{2,\gamma} \right\}.
\end{aligned}$$

Здесь и далее символ « \wedge » обозначает поля, взятые во вспомогательной («транспонированной») среде, описываемой транспонированным тензором диэлектрической проницаемости. Остальные величины рассчитываются с использованием приведённых выше формул для $K_{\alpha,\tilde{s},\tilde{m}}^{n,s,m}(\tilde{q}) = K_{\alpha,\tilde{s},\tilde{m}}^{\beta,s,m}(q_{m,n},\tilde{q})$, где β может быть взято равным 1 или 2; выражения для величин $\hat{K}_{\gamma,+m}^{n,-,-m}$ и $\hat{K}_{\gamma,+m}^{\beta,-,-m}$ получаются из (22) заменой величин $\mathbf{E}_{s,m,\alpha}^{(f)}$ и $\mathbf{H}_{s,m,\alpha}^{(f)}$ на $\mathbf{E}_{s,m,\alpha}^{(i)}$ и $\mathbf{H}_{s,m,\alpha}^{(i)}$ соответственно.

Из условий непрерывности тангенциальных компонент полей на выходном торце цилиндра ($z = L$)

$$\begin{aligned}
E_{\varphi}^{(c)} &= E_{\varphi}^{(t)}, & H_{\varphi}^{(c)} &= H_{\varphi}^{(t)}, \\
E_{\rho}^{(c)} &= E_{\rho}^{(t)}, & H_{\rho}^{(c)} &= H_{\rho}^{(t)}
\end{aligned} \tag{23}$$

получаем второй набор интегральных уравнений для коэффициентов разложения:

$$\begin{aligned}
a_{+,m,\alpha}(q) \tilde{N}_{+,m,\alpha}(q) &= - \sum_{s=-}^{+} \left(\sum_{\beta=1}^2 \int_0^{\infty} b_{s,m,\beta}(\tilde{q}) K_{\alpha,-,-m}^{\beta,s,m}(\tilde{q},q) e^{-ik_0(p_s(\tilde{q})+p_-(q))L} d\tilde{q} + \right. \\
&\quad \left. + \sum_n b_{s,m,n} K_{\alpha,-,-m}^{n,s,m}(q) e^{-ik_0(p_{s,m,n}+p_-(q))L} \right) - \sum_{\beta=1}^2 b_{+,m,\beta}(q) M_{+, \beta, \alpha, m}(q), & (24) \\
b_{-,m,n} N_{-,m,n} &= \sum_{\alpha=1}^2 \int_0^{\infty} a_{+,m,\alpha}(\tilde{q}) K_{\alpha,+m}^{n,+,-m}(\tilde{q}) e^{-ik_0(p_{+,m,n}+p_+(\tilde{q}))L} d\tilde{q}, \\
b_{-,m,\beta}(q) N_{-,m,\beta}(q) &= \sum_{\alpha=1}^2 \int_0^{\infty} a_{+,m,\alpha}(\tilde{q}) K_{\alpha,+m}^{\beta,+,-m}(q,\tilde{q}) e^{-ik_0(p_+(q)+p_+(\tilde{q}))L} d\tilde{q}.
\end{aligned}$$

В итоге уравнения (20) совместно с уравнениями (24) образуют полную систему интегральных уравнений для определения коэффициентов рассеяния.

Заметим, что все интегралы в выражениях (22) могут быть найдены в замкнутой форме, что значительно облегчает поиск решений системы интегральных уравнений (20) и (24).

Результаты численных расчётов

Численные расчёты были выполнены для следующих безразмерных параметров, которые могут быть реализованы в лабораторных условиях [9-11]: $\omega_p / \omega_H = 12,68$, $\omega_H a / c = 1,17$. Рассматривалось рассеяние E - и H -поляризованных электромагнитных вихревых бесселевых пучков с топологическим зарядом $m=1$, продольным волновым числом $p_0 = 1/\sqrt{2}$ и частотой $\omega = 0,025 \omega_H$. Для E -поляризованного пучка амплитуды компонент полей выбираются равными $A^{(1)} = 1/q_0$ и $A^{(2)} = 0$, для H -поляризованного пучка – равными $A^{(1)} = 0$ и $A^{(2)} = 1/q_0$.

Для нахождения коэффициентов рассеяния волн система интегральных уравнений (20) и (24) была решена численно с помощью квадратурного метода Симпсона. Верхние пределы интегралов, входящих в уравнения (20) и (24), были взяты равными 4000. Отметим, что в рассматриваемом случае цилиндрический волновод, заполненный резонансной магнитоактивной плазмой, поддерживает бесконечное число распространяющихся собственных мод. При проведении численных расчётов учитывались первые 58 мод. Заметим, что выбор указанных выше параметров численных расчётов обеспечивал необходимую точность решения, которая контролировалась по выполнению граничных условий в плоскостях $z=0$ и $z=L$.

На рис. 2(а) и 2(б) показаны азимутальные компоненты суммарного поля падающего бесселева пучка и рассеянных назад волн (сплошные линии), а также поля в области $0 < z < L$ (кружки) в зависимости от координаты ρ в сечении $z=0$ при $\varphi=0$. На рис. 2(в) и 2(г) изображены аналогичные зависимости для поля в области $0 < z < L$ (кружки) и рассеянного вперёд поля (сплошные линии) в сечении $z=L$. Графики на рис. 2 соответствуют случаю рассеяния вихревого бесселева пучка E -поляризации с топологическим зарядом $m=1$ на цилиндре с длиной $L=2\pi/k_0$. Как видно из представленных данных, азимутальные компоненты полей по обе стороны каждого из сечений $z=0$ и $z=L$ совпадают с графической точностью. Данный факт свидетельствует о правильности полученного численного решения для выбранного случая. Проверка точности решений для других рассмотренных ниже случаев ($L=20\pi/k_0$ и $L=100\pi/k_0$) проводилась аналогичным образом.

Получим диаграмму направленности рассеянного поля. Для этого дифрагированное поле в дальней зоне рассчитывалось с использованием метода перевала. На рис. 3 показана радиальная составляющая вектора Пойнтинга, умноженная на квадрат расстояния до точки наблюдения и нормированная на $(A^{(1)}q_0)^2$, как функция угловой координаты θ , отсчитываемой от оси цилиндра в плоскости xz ($\theta = \arctg(x/z)$), в случае падения пучка E -поляризации с $m=1$. Обратим внимание на то, что на рис. 3 для волн, рассеянных вперёд ($0 < |\theta| < \pi/2$) и назад ($\pi/2 < \theta < 3\pi/2$), используются синие и красные линии соответственно. Графики построены для различных длин рассеивающего цилиндра: $k_0L=2\pi$ (а, г), $k_0L=20\pi$ (б, д), $k_0L=100\pi$ (в, е). Как видно из данных графиков, с увеличением длины цилиндра происходит возрастание количества лепестков диаграммы направленности рассеянного поля, а также мощности волн, рассеянных вперёд, которая концентрируется вблизи направлений $\theta = \pm\pi/4$.

Тангенс этих углов определяется отношением поперечного волнового числа падающего пучка к его продольному волновому числу. При этом для мощности волн, рассеянных назад, не наблюдается заметного её увеличения. В рассматриваемых случаях падающий вихревой пучок слабо рассеивается в направлении, противоположном направлению его прихода, а в диаграмме направленности имеется локальный минимум в направлении его распространения $\theta = 0$.

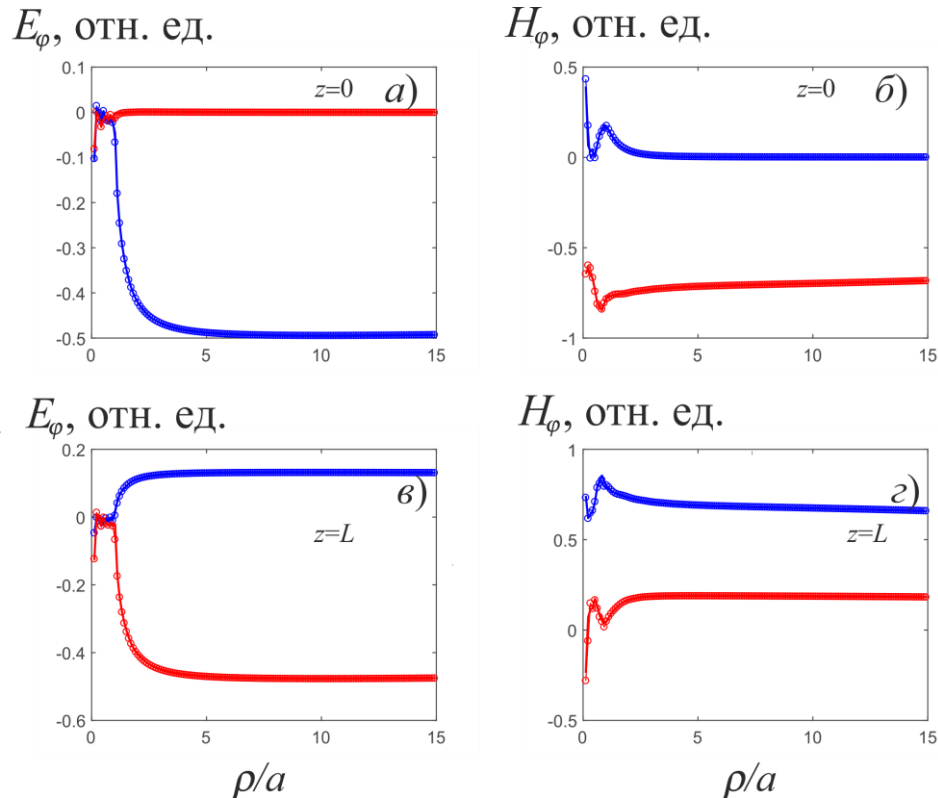


Рис.2. Азимутальные компоненты суммарного поля падающего пучка и рассеянных назад волн (сплошные линии), а также поля в области $0 < z < L$ (кружки) в зависимости от координаты ρ в сечении $z = 0$ при $\varphi = 0$ (панели а и б). На панелях в и г) изображены аналогичные зависимости для поля в области $0 < z < L$ (кружки), а также рассеянного вперед поля (сплошные линии) в сечении $z = L$. Действительная и мнимая части компонент поля показаны синими и красными линиями соответственно. Топологический заряд пучка $m = 1$, длина рассеивателя $L = 2\pi / k_0$

Как видно из рис. 4, построенного для вихревого пучка H -поляризации при тех же параметрах, что и на рис. 3, отмеченные выше особенности диаграммы направленности рассеянного поля сохраняются и для этой поляризации.

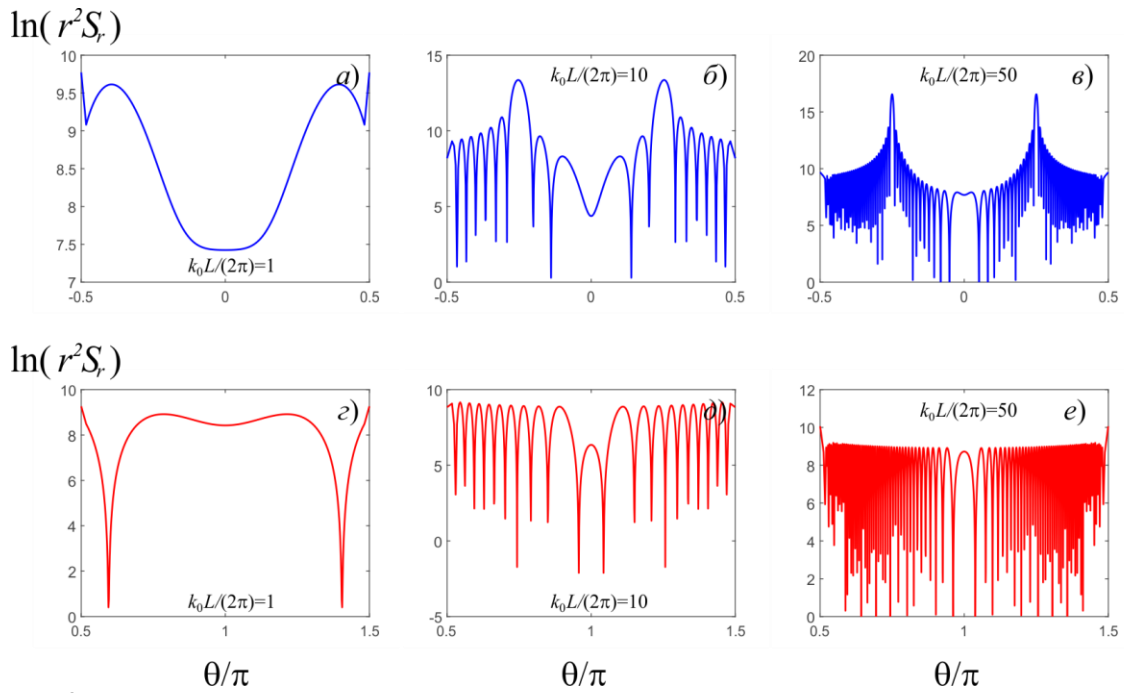


Рис.3. Радиальная составляющая вектора Пойнтинга в дальней зоне, умноженная на квадрат расстояния до точки наблюдения и нормированная на $(A^{(1)}q_0)^2$, в зависимости от угла θ в случае падающего пучка E -поляризации с $m=1$ и $p_0=1/\sqrt{2}$ при разных длинах цилиндра: $k_0L=2\pi$ (а, з), $k_0L=20\pi$ (б, д), $k_0L=100\pi$ (в, е). Синие линии соответствуют волнам, рассеянным вперёд, красные линии – волнам, рассеянным назад

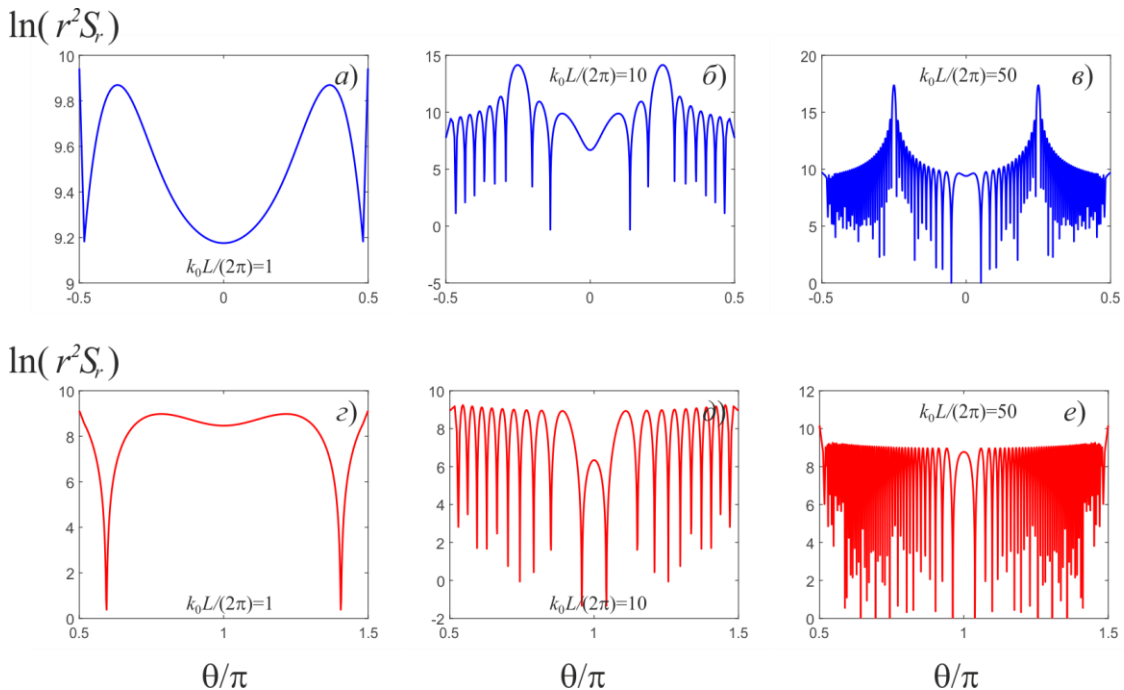


Рис.4. То же, что и на рис. 3, в случае падения пучка H -поляризации при нормировке радиальной составляющей вектора Пойнтинга на $(A^{(2)}q_0)^2$

Заключение

В настоящей работе применительно к радиочастотному диапазону изучены особенности дифракции электромагнитного вихревого бесселева пучка на электрически тонком цилиндре конечной длины, заполненном магнитоактивной плазмой. Показано, что с возрастанием длины цилиндра происходит постепенное увеличение числа лепестков диаграммы направленности рассеянного излучения, сопровождающееся появлением в ней (при рассеянии вперёд) максимумов в направлениях, тангенс полярного угла которых равен отношению поперечного волнового числа пучка к его продольному волновому числу. Отметим, что аналогичное поведение было отмечено в работе [12] для случая рассеяния бесселевых пучков на диэлектрической сфере достаточно большого радиуса. Кроме того, в диаграмме направленности рассеянного вперёд поля наблюдаются минимумы в направлении вдоль оси цилиндра. Показано, что указанные выше особенности рассеянного поля наблюдаются при рассеянии вихревого пучка как E -, так и H -поляризации. Полученные результаты могут быть востребованы при разработке систем возбуждения и регистрации вихревых пучков с заданными топологическими зарядами.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 18-72-10046)

Литература

1. Allen L., Beijersbergen M., Spreeuw R., Woerdman J. Orbital angular momentum of light and the transformation of Laguerre-Gaussian laser modes // *Phys. Rev. A*. 1992. Vol. 45, No. 11. P. 8185-8189.
2. Wang J., Yang J.-Y., Fazal I. M., Nisar A., Yan Y., Huang H., Ren Y., Yue Y., Dolinar S., Tur M., Willner A. E. Terabit free-space data transmission employing orbital angular momentum multiplexing // *Nature Photon*. 2012. Vol. 6, No. 7. P. 488-496.
3. Hiesmayr B. C., de Dood M. J. A., Löffler W. Observation of four-photon orbital angular momentum entanglement // *Phys. Rev. Lett*. 2016. Vol. 116, No. 7. P. 073601.
4. Leyser T. B., Norin L., McCarrick M., Pedersen T. R., Gustavsson B. Radio pumping of ionospheric plasma with orbital angular momentum // *Phys. Rev. Lett*. 2009. Vol. 102, No. 6. P. 065004.
5. Es'kin V. A., Kudrin A. V. Resonance scattering of electromagnetic vortex Bessel beams by an artificial gyrotropic cylinder // *Proceedings of 9th International Congress on Advanced Electromagnetic Materials in Microwaves and Optics – Metamaterials 2015*. 2015. P. 877-879.
6. Kondrat'ev I. G., Kudrin A. V., Zaboronkova T. M. *Electrodynamics of density ducts in magnetized plasmas*. Amsterdam: Gordon and Breach, 1999. 288 p.
7. Es'kin V. A., Kudrin A. V. A new method for constructing an orthogonal system of eigenwaves of an open cylindrical waveguide surrounded by an isotropic medium // *PIERS Proc*. 2017. P. 843-848.
8. Шевченко В. В. Плавные переходы в открытых волноводах. М.: Наука, 1969. 192 с.
9. Chen F. F., Boswell R. W. Helicons - The past decade // *IEEE Trans. Plasma Sci*. 1997. Vol. 25, No. 6. P. 1245-1257.
10. Carter M. D., Baity F. W., Barber Jr. G. C., Goulding R. H., Mori Y., Sparks D. O., White K. F., Jaeger E. F., Chang-Diaz F. R., Squire J. P. Comparing experiments with modeling for light ion helicon plasma sources // *Phys. Plasmas*. 2002. Vol. 9, No. 12. P. 5097-5110.
11. Кралькина Е. А. Индуктивный высокочастотный разряд низкого давления и возможности оптимизации источников плазмы на его основе // *УФН*. 2008. Т. 178, № 5. С. 519-540.

12. Mitri F. G., Li R. X., Guo L. X., Ding C. Y. Resonance scattering of a dielectric sphere illuminated by electromagnetic Bessel non-diffracting (vortex) beams with arbitrary incidence and selective polarizations // *Ann. Phys.* 2015. Vol. 361. P. 120-147.