Модовый состав и огибающая мощного акустического импульса в неоднородном волноводном канале

М.А. Бисярин

Санкт-Петербургский государственный университет
199034 Санкт-Петербург, Университетская наб., 7-9
m.bisyarin@spbu.ru

Рассмотрен нелинейный процесс распространения акустического импульса в плоском волноводном канале. Гидродинамическая система уравнений сведена к нелинейному волновому уравнению. Предложен асимптотический метод решения нелинейного волнового уравнения, позволяющий без дополнительных ограничений разделить проблему на определение поперечного распределения волнового поля и анализ нелинейной динамики в продольном направлении. Представлено аналитическое описание модовой структуры импульса и нелинейной динамики огибающей с учётом продольной неоднородности волноводного канала.

Nonlinear process of the acoustic pulse propagation in a planar wave-guiding channel is considered.The hydrodynamic set of equations is reduced to the nonlinear wave equation. An asymptotic approach is proposed for solving the nonlinear wave equation, enabling, without additional restrictions, to separate the problem on determination of the wave field transverse distribution and on analysis of the nonlinear dynamics in longitudinal direction. Analytical description of the pulse mode structure and nonlinear dynamics of the envelope are presented with account of longitudinal inhomogeneity of the wave-guiding channel.

Введение

Решение обратных задач дистанционного зондирования природных сред диктует необходимость разработки и адаптации нелинейных моделей распространения и взаимодействия акустических, электромагнитных, внутренних гравитационных и других типов волн. При этом среда распространения, как правило, существенно неоднородна, в ней существуют слои и могут формироваться устойчивые или спорадические волноводные каналы. Отмечалось [1] появление особых инфразвуковых каналов в зоне полярных сияний. Кроме того, волноводные каналы могут создаваться и как побочный антропогенный эффект [2], и в результате целенаправленного воздействия: так, в процессе ионосферного распространения мощный электромагнитный пучок модифицирует плазму и создаёт волноводный канал [3].

Актуальной проблемой остаётся разработка общих аналитических методов описания нелинейных режимов волноводного распространения волн различной природы. Содержание настоящей работы составляет исследование распространения амплитудно-модулированного акустического импульса с высокочастотным заполнением в волноводном слое с продольной неоднородностью.

Нелинейное волновое уравнение

Акустические и гидродинамические процессы в реальных средах сопровождаются специфическими эффектами, которые могут быть объяснены и описаны только в рамках полной системы уравнений Навье-Стокса (или Эйлера, если пренебрегают диссипативными процессами) [4]. Тем не менее, в акустических волнах проявляются также и общие черты волновой динамики, что позволяет применять к ним методы и результаты общей теории линейных и нелинейных волн [5]. Исследования распространения нелинейного акустического импульса исходя непосредственно из гидродинамических систем уравнений [6] обеспечивают полное описание процесса, однако особенности, характерные для нелинейных волн независимо от их физической природы, оказываются скрытыми в громоздких преобразованиях. Для описания эволюции огибающей импульса может быть применено нелинейное уравнение Шредингера [7], однако при этом свойства несущей и поперечная структура поля импульса остаются вне рамок рассмотрения.

Многие явления нелинейной акустики имеют прямые аналоги в нелинейной оптике и других электромагнитных процессах [8], и они хорошо описываются нелинейным волновым уравнением с квадратичной зависимостью показателя преломления от распространяющегося волнового поля. Для акустических процессов также представляется вполне естественным обобщить процедуру вывода волнового уравнения из линеаризованной системы уравнений Эйлера на нелинейный случай. Это позволит аналитически описать поперечное распределение волнового поля и нелинейную эволюцию огибающей импульса в условиях совместного действия большой мощности, малой длительности и неоднородности волноводного канала.

Учёт нелинейных акустических эффектов достигается путём сохранения нелинейных членов в уравнениях непрерывности, движения и состояния системы Эйлера. Представим плотность и давление в виде сумм ρ_o+ρ and p_o+p соответственно, ρ_o и p_o – постоянные плотность и давление в равновесном состоянии, а ρ и p – зависящие от координат и времени отклонения от этих равновесных значений. Считая распространение звука адиабатическим процессом, уравнение состояния, связывающее давление и плотность среды, запишем с точностью до кубичных слагаемых: их посредством описывается самовоздействие волны, а нелинейность процесса проявляется в квадратичной зависимости скорости волны от её амплитуды. В работе [9] проведён вывод нелинейного волнового уравнения и показано, что значение показателя адиабаты, равное 3/2, разделяет акустически фокусирующие (при бо́льших значениях) и дефокусирующие (при меньших значениях) среды.

Таким образом, распространение акустической волны большой амплитуды адекватно описывается нелинейным волновым уравнением

$$\Delta p - w\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0, \tag{1}$$

которое в (1) записано в безразмерных пространственных (пропорциональных волновому числу) координатах и безразмерной временно́й (пропорциональной угловой частоте) переменной. Неизвестная функция p представляет собой относительное отклонение давления от равновесного значения в среде. В уравнении (1), по аналогии с электромагнитными процессами, введена функция w – квадрат показателя преломления среды. В случае неоднородных сред эта функция зависит от координат точки, в дополнение к этому, для моделирования нелинейных процессов необходимо также задавать её зависимость от искомого волнового поля. В настоящей работе предполагается линейная зависимость функции w от интенсивности волнового процесса:

$$w = \beta^2(\vec{r}) + \frac{1}{2}\alpha(\vec{r})|p|^2 + i\tilde{\gamma}(\vec{r}), \tag{2}$$

здесь $\alpha(\vec{r})$ – аналог электродинамического коэффициента Керра, а мнимая добавка $\tilde{\gamma}(\overrightarrow{r})$ введена для формального учёта поглощения в среде. В (2) предполагается, что квадрат показателя преломления зависит не от текущего значения поля, а от амплитуды волны, что вполне естественно для импульса с высокочастотным заполнением (несущей) и при наличии инерционности среды.

Модовая структура импульса в неоднородном волноводном канале

Предметом настоящей работы является исследование слабо-нелинейного волнового процесса распространения акустического импульса в плоско-слоистом волноводном канале, сформировавшемся в среде за счёт специфической зависимости линейной части квадрата показателя преломления β^2 от поперечной координаты n. Допустима зависимость свойств канала от продольной координаты, однако, по самомý смыслу волноводного канала, эта зависимость должна быть существенно слабее зависимости от n. Введём малый параметр ε как порядок величины амплитуды волнового поля, и с его же помощью введём медленную продольную координату σ, пропорциональную ε^2. В природных условиях отсутствуют чётко выраженные границы между волноводным каналом и окружающей средой, поэтому необходимо рассматривать зависимости функции w от поперечной координаты n вида, изображённого на рис.1. Принципиальными элементами волноводной структуры являются максимумы квадрата показателя преломления $\beta_0^2(\sigma)$, определяющие ось волноводного канала, и значения $\beta_1^2(\sigma)$ в окружающей среде. Следует отметить, что этот профиль может медленно изменяться вдоль волноводного канала. Коэффициент затухания также будем считать малой величиной $\tilde{\gamma} = \varepsilon^2\gamma$.

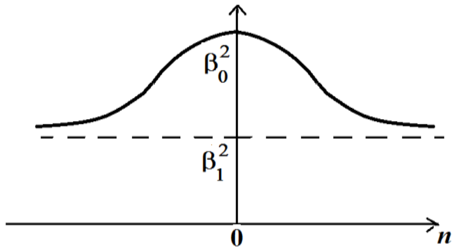

Рис.1. Схематическая зависимость линейной части квадрата показателя преломления *w* от поперечной координаты *n*, при которой в среде формируется волноводный канал.

Примем для определённости, что функция β^2 зависит от n следующим образом:

$$\beta^2(n,\sigma) = \beta_0^2(\sigma) - \left(\beta_0^2(\sigma) - \beta_1^2(\sigma)\right)\mathrm{th}^2\beta_2(\sigma)n = \beta_1^2(\sigma) + \frac{\beta_0^2(\sigma)-\beta_1^2(\sigma)}{\mathrm{ch}^2\beta_2(\sigma)n}, \qquad (3)$$

здесь величина β_2 задаёт ширину волноводного канала. Зависимость в (3) от переменной σ описывает продольную неоднородность волноводного канала и окружающей среды.

Введём переменную:

$$\theta = \frac{1}{\varepsilon}\int_0^\sigma q(\sigma')\,d\sigma' - \varepsilon t, \qquad (4)$$

характеризующую фазу огибающей импульса (функция $q(\sigma)$ будет определена в процессе решения задачи). Асимптотическое по малому параметру ε решение уравнения (1) ищется в виде:

$$p = \varepsilon P(n,\theta,\sigma)\exp\left\{i\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^\sigma r(\sigma')d\sigma' - t\right)\right\} = \varepsilon\sum_{j=0}^{\infty}\varepsilon^j P_j(n,\theta,\sigma)\cdot\exp\left\{i\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^\sigma r(\sigma')d\sigma' - t\right)\right\}, \quad (5)$$

неизвестными величинами являются локальная постоянная распространения $r(\sigma)$, разложение комплексной амплитуды $P_j(n,\theta,\sigma)$ и фаза огибающей θ. После подстановки выражения (5) в нелинейное волновое уравнение (1) получаем в главном порядке по ε уравнение:

$$\frac{\partial^2 P_0}{\partial n^2} + (\beta^2(n,\sigma) - r^2(\sigma))P_0 = 0, \quad (6)$$

$\beta^2(n,\sigma)$ представляется формулой (3). Искомая функция в (6) должна удовлетворять граничным условиям $P_0 \to 0$ при $n \to \pm\infty$. Уравнение (6) является дифференциальным лишь по переменной n, и его решение может быть представлено в виде произведения $P_0(n,\theta,\sigma) = V_0(n,\sigma)E(\theta,\sigma)$, $V_0(n,\sigma)$ – это поперечное распределение волнового поля, медленно меняющееся вдоль трассы распространения, а $E(\theta,\sigma)$ описывает нелинейную динамику огибающей импульса. Считаем, что поперечное распределение волнового поля нормировано условием $\int_{-\infty}^{\infty} V_0^2(n,\sigma)\,dn = 1$. Функция $E(\theta,\sigma)$ определяется на последующем шаге асимптотической процедуры.

Решение уравнения (6) ищется в виде:

$$P_0(n,\theta,\sigma) = \frac{F(x,\sigma)}{\mathrm{ch}^{K(\sigma)}\beta_2(\sigma)n}\cdot E(\theta,\sigma), \quad (7)$$

где введена переменная

$$x = \frac{1}{1+e^{-2\beta_2(\sigma)n}} \quad (8)$$

Поскольку координата n изменяется по всей вещественной оси, новая переменная x, как следует из её определения (8), лежит в диапазоне $0 \le x \le 1$.

Подстановка (7) в (6) имеет следствием для функции F гипергеометрическое по переменной x уравнение:

$$x(x-1)\frac{d^2F}{dx^2} + \big((2K(\sigma)+2)x - (K(\sigma)+1)\big)\frac{dF}{dx} + \left(K(\sigma)(K(\sigma)+1) - \frac{\beta_0^2(\sigma)-\beta_1^2(\sigma)}{\beta_2^2(\sigma)}\right)F = 0.$$

Теория этого уравнения содержится в [10], из неё следует, что ограниченное на отрезке [0,1] решение существует при

$$K(\sigma) = \sqrt{\frac{\beta_0^2(\sigma)-\beta_1^2(\sigma)}{\beta_2^2(\sigma)} + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2} - m, \quad (9)$$

m=0, 1, 2 и выражается гипергеометрической функцией:

$$F = F\left(2K(\sigma)+1+m, -m | K(\sigma)+1 | \frac{1}{1+e^{-2\beta_2(\sigma)n}}\right), \quad (10)$$

максимальное значение модового индекса m определяется условием положительности показателя $K(\sigma)$ в представлении решения (7). Локальная постоянная распространения m-ой моды в (5)

$$r^2(\sigma) = \beta_1^2(\sigma) + \beta_2^2(\sigma)K^2(\sigma), \quad (11)$$

при этом значении удовлетворяются граничные условия для уравнения (5).

Рассмотрим распространение импульса, высокочастотное заполнение которого представлено основной модой волноводного канала с m=0. Гипергеометрическая функция F (10) тогда обращается в единицу, и поперечное распределение волнового поля описывается функцией $\mathrm{ch}^{-K(\sigma)}\beta_2(\sigma)n$, здесь

$$K(\sigma) = \sqrt{\frac{\beta_0^2(\sigma) - \beta_1^2(\sigma)}{\beta_2^2(\sigma)} + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2}$$

Нормированное условием $\int_{-\infty}^{\infty} V_0^2(n,\sigma)dn = 1$ распределение задаётся выражением:

$$V_0(n,\sigma) = \frac{\sqrt{\beta_2(\sigma)\Gamma(2K(\sigma))}}{2^{K(\sigma)-\frac{1}{2}}\,\Gamma(K(\sigma))} \frac{1}{\mathrm{ch}^{K(\sigma)}\beta_2(\sigma)n}, \quad (12)$$

а локальная постоянная распространения $r(\sigma)$ – формулой (11).

Условие разрешимости задачи для $P_1(n,\theta,\sigma)$ [5, 9] имеет следствием выражение для функции $q(\sigma)$

$$q(\sigma) = r(\sigma) + \frac{1}{r(\sigma)} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial V_0}{\partial n}\right)^2 dn, \quad (13)$$

причём для V_0 (12) интеграл допускает аналитическое вычисление:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial V_0}{\partial n}\right)^2 dn = \frac{K^2(\sigma)}{2K(\sigma)+1}.$$

Уравнение для огибающей получается как условие разрешимости задачи для $P_2(n,\theta,\sigma)$, оно имеет вид

$$ir(\sigma)\frac{\partial E}{\partial \sigma} + g(\sigma)\frac{\partial^2 E}{\partial \theta^2} + i\big(r'(\sigma) + \gamma(\sigma)\big)E + h(\sigma)|E|^2 E = 0 \quad (14)$$

и представляет собой нелинейное уравнение Шредингера с коэффициентами, зависящими от продольной координаты вследствие продольной неоднородности волноводного канала. Фаза огибающей в (14) определяется с помощью выражения (13).

Выражения для коэффициентов ранее получены в [9], там же обсуждается и построение солитонных решений уравнения (14).

Заключение

Слабо-нелинейные акустические волновые процессы представляют собой отдельный класс волнового движения, существенно отличающийся от процессов, в которых нелинейность выступает как доминирующий фактор. Включение слабой нелинейности в теоретическую модель позволяет описать возникновение нелинейных эффектов на фоне линейного приближения. В отличие от сильной слабая нелинейность не влияет на высокочастотное заполнение импульса в градиентном волноводном канале со слабой продольной неоднородностью, но формирует солитонную огибающую. Предложенная в данной работе методика позволяет в ходе единой асимптотической процедуры разделить задачу на линейную и нелинейную составляющие и аналитически описать моды акустического сигнала и нелинейную эволюцию огибающей в волноводном канале с продольной неоднородностью.

Литература

1. Wilson C.R. Auroral infrasonic waves // Journal of Geophysical Research. 1969. Vol.74, №7, p. 1812-1836.
2. Sorokin A.G., Lobycheva I.Yu. On simulation of the atmospheric acoustic channel for some nuclear tests in former Soviet test site Semipalatinsk // Journal of Atmospheric and Solar-Terrestrial Physics. 2011. Vol.73, p. 1629–1635.
3. Терещенко Е.Д., Турянский В.А., Худукон Б.З., Юрик Р.Ю., Фролов В.Л. О пространственной структуризации слоя F_2 по данным спутникового радиопросвечивания ионосферы, возмущённой мощным коротковолновым радиоизлучением // Изв. вузов. Радиофизика. 2017. Т. 60, № 8, с. 680-691.
4. Бахвалов Н.С., Жилейкин Я.М., Заболотская Е.А. Нелинейная теория звуковых пучков. –М., Наука, 1982.
5. Молотков И.А. Аналитические методы в теории нелинейных волн. –М., Наука, 2003. 208 с.
6. Заболотская Е.А., Шварцбург А.Б. Нелинейный акустический волновод // Акустический журнал. 1987. Т.33, №2, с. 373-375.
7. Nozaki K., Taniuti T. Envelope solitons in nonlinear acoustics // Physica D. 1986. Vol.18, №1-3, p. 127-134.
8. Бункин Ф.В, Кравцов Ю.А., Ляхов Г.А. Акустические аналоги нелинейных оптических явлений // Успехи физических наук. 1986. Т.149, №3.
9. Бисярин М.А. Акустические импульсы конечной амплитуды в волноводном слое с продольной неоднородностью // Прикладная механика и техническая физика. 2007. Т. 48, №6, с. 57-69.
10. Олвер Ф. Асимптотика и специальные функции. – М., Наука, 1990. 528 с.