

## **Оптимальное определение рельефа поверхности по совокупности фотометрических и альтиметрических данных**

И. А. Дулова, Ю. В. Корниенко, Н. В. Бондаренко

*Институт радиофизики и электроники им. А.Я. Усикова НАН Украины, 12, ул. Ак. Проскуры, Харьков, 61085, Украина, E-mail: irina.dulv@gmail.com*

*Исследована и продемонстрирована на компьютерной модели возможность существенного повышения точности определения рельефа поверхности планеты фотоклинометрическим методом путём привязки искомого рельефа к альтиметрическим данным. Сформулирован метод такой привязки. Метод позволяет найти наиболее вероятный рельеф с точностью, характерной для альтиметрии, и пространственным разрешением, характерным для изображений, используемых при вычислениях.*

*The possibility of a significant increase in an accuracy of the planet surface relief determination by the photoclinometric method taking into account altimetric data was investigated and demonstrated using a computer model. The method of such a control is formulated. The method allows retrieving the most probable relief with an accuracy of altimetry data and a spatial resolution of images used for calculations.*

### **Введение**

В настоящее время имеет место интенсивное исследование планет с помощью космических аппаратов. При решении научных задач часто требуется определение рельефа исследуемого участка поверхности планеты по её изображениям. Казалось бы, в этом нет смысла, поскольку существует возможность определить рельеф непосредственно, с помощью альтиметра. Однако, когда требуется определить рельеф целого района с высоким пространственным разрешением, эта процедура становится трудно осуществимой из-за необходимости большого числа пролётов аппарата над исследуемым районом.

Альтиметрический метод по своей сути является “последовательным”, т.к. в нём расстояния до элементов поверхности измеряются последовательно одно за другим. Использование изображений, когда исходная информация регистрируется за одну или несколько экспозиций, может рассматриваться как “параллельный” метод. Таким методом и является фотометрический метод, предложенный в [1], развитый в [2] и часто называемый фотоклинометрическим. При этом фотометрия понимается в расширенном смысле как измерение яркости в любом диапазоне длин волн, не обязательно в оптическом. Так, в работе [3] рассматривается определение рельефа поверхности с помощью радиолокатора с синтезированной апертурой. Метод был опробован на модельных [4] и реальных изображениях [5].

Фотоклинометрический метод позволяет получить рельеф с точностью и разрешением, присущими исходным изображениям. Это означает высокое разрешение, но не всегда достаточную точность. С другой стороны, прямая альтиметрия может дать высокую точность, но имеет ограниченные возможности в отношении разрешения.

Поэтому на повестку дня стал вопрос о сочетании преимуществ каждого из этих методов в одном более совершенном методе. Этот новый метод был разработан в ИРЭ НАНУ и кратко изложен в [6]. Ниже его суть излагается более подробно.

### **1. История вопроса**

До начала космической эры единственным источником информации о строении поверхности планеты были астрономические наблюдения. В 1951 г. ван Диггелен [7]

предложил метод определения рельефа через интеграл от поля наклонов, которые можно найти, зная фотометрические свойства лунной поверхности [8], по яркости элемента на изображении. Такая возможность основана на том, что яркость элемента поверхности определённым образом зависит от его ориентации относительно наблюдателя и источника света. Если эта зависимость известна, существует возможность определить наклон элемента поверхности по его яркости на изображении путём решения соответствующего алгебраического уравнения для каждой точки исследуемого района.

Задача определения рельефа, таким образом, сводилась к решению дифференциального уравнения

$$\nabla H(x, y) = \mathbf{t}(x, y), \quad (1)$$

где  $\mathbf{t}(x, y)$  – поле наклонов, найденное из исходного снимка.

Это уравнение элементарно решается путём интегрирования поля наклонов по контуру, ведущему из начала координат в точку  $(x, y)$ . Таким образом, задача, казалось бы, была решена. В этой задаче, однако, таилась некорректность, обесценивающая полученный результат.

Как известно [9], ротор поля, являющегося градиентом некоторого скалярного поля, тождественно равен нулю. Поэтому интеграл от этого поля по контуру, ведущему из точки А в точку В, не зависит от формы контура, что обеспечивает возможность корректно вычислить высоту в каждой точке исследуемого района. Как и во многих других обратных задачах, гармония нарушается в тот момент, когда мы используем в качестве правой части данные, полученные в результате эксперимента или наблюдения, из-за погрешностей в регистрации. Эта погрешность, содержащаяся в правой части (1), нарушает равенство ротора правой части нулю. В результате, значение вычисленной высоты в точке В будет зависеть от пути интегрирования, и значение высоты  $H(x, y)$  становится неоднозначным. Уравнение (1) в этом случае (при случайном шуме) с вероятностью 1 вообще не имеет решения.

Выход из положения был предложен в 1973 г. в работе [1]. Вместо задачи найти (несуществующее) решение уравнения (1), была поставлена задача найти оптимальную статистическую оценку для  $H(x, y)$  при заданном  $\mathbf{t}(x, y)$ .

Этот подход был осуществлён, развит, исследован и распространён на случай, когда определению подлежит не только рельеф поверхности, но одновременно и её фотометрические параметры (альbedo и т.д.) [2].

## 2. Оптимальная оценка рельефа поверхности по фотометрическим данным

Пусть рельеф исследуемого района поверхности планеты, освещённого Солнцем, описывается функцией  $H(x, y)$ . Имеется  $m$  снимков этого района, полученных при разных значениях азимута источника света. По яркости поверхности на этих снимках можно найти поле наклонов  $\mathbf{t}(x, y)$ . Поскольку яркость по этим снимкам определяется с некоторой погрешностью, то же относится и к полю наклонов. Поэтому связь между найденным по результатам фотометрии полем наклонов  $\mathbf{t}(x, y)$  и искомым рельефом  $H(x, y)$  можно записать в виде

$$\nabla H(x, y) = \mathbf{t}(x, y) - \delta(x, y), \quad (2)$$

где  $\delta(x, y)$  – (неизвестная) случайная погрешность, с которой определено поле наклонов  $\mathbf{t}(x, y)$ .

Ротор этого слагаемого с вероятностью 1 отличен от нуля. Поэтому, вместо задачи решить это уравнение, мы будем ставить задачу найти на основании уравнения (2) оптимальную статистическую оценку рельефа  $H(x, y)$ . Для этого надо, чтобы была задана априорная статистика для рельефа и погрешности. Это требование мы выполним, полагая, что  $H(x, y)$  и  $\delta(x, y)$  представляют собой реализации стационарных

гауссовых процессов с заданными спектральными плотностями  $I_H(k_x, k_y)$  и  $I_\delta(k_x, k_y)$ . Здесь  $k_x$  и  $k_y$  – компоненты вектора пространственной частоты  $\mathbf{k}$ .

Поскольку для стационарного гауссова процесса фурье-компоненты распределены независимо друг от друга, задача отыскания наиболее вероятного фурье-образа рельефа  $\tilde{H}(k_x, k_y)$  сводится к отысканию наиболее вероятного значения его компонент для каждого значения пространственной частоты в отдельности. Решая поставленную задачу таким способом, мы получим результат, являющийся обобщением [10] и частным случаем [11], а именно: фурье-образ искомой оптимальной оценки рельефа равен

$$\tilde{H}(k_x, k_y) = \frac{-i\mathbf{k}\tilde{t}(k_x, k_y)}{\mathbf{k}^2 + I_\delta(k_x, k_y)/I_H(k_x, k_y)}, \quad (3)$$

где буквы с волной означают фурье-образы соответствующих функций.

### 3. Оптимальная оценка рельефа поверхности по альтиметрическим данным

Пусть теперь нам известен результат альтиметрии исследуемого района  $h(x, y)$ , представляющий собой функцию, описывающую зависимость измеренного значения высоты от координат. Это значение  $h(x, y)$  не равно высоте, а является свёрткой истинной высоты  $H(x, y)$  с диаграммой направленности альтиметра  $D(x, y)$  и возмущена погрешностью  $\varepsilon(x, y)$

$$h(x, y) = \int D(x-x', y-y')H(x', y')dx'dy' + \varepsilon(x, y). \quad (4)$$

Как и в случае (2), в отсутствие погрешности это равенство можно было бы рассматривать как интегральное уравнение, определяющее искомый рельеф. Однако в связи со сглаживающим характером интегрального оператора и случайным характером погрешности в (4) задачу можно ставить только статистически как задачу оптимальной статистической оценки искомого рельефа при данном результате его измерения. Для этого  $h(x, y)$  и  $\varepsilon(x, y)$  будем полагать реализациями стационарных гауссовых процессов с известными спектральными плотностями соответственно  $I_H(k_x, k_y)$  и  $I_\delta(k_x, k_y)$ . Эта задача полностью аналогична задаче восстановления изображения, приводящей к винеровскому фильтру [12], и отличается от неё только физическим смыслом фигурирующих в ней величин.

Таким образом, в этом случае для оптимальной статистической оценки фурье-образа рельефа имеем

$$\tilde{H}(k_x, k_y) = \frac{\tilde{D}^*(k_x, k_y)\tilde{H}(k_x, k_y)}{\tilde{D}^*(k_x, k_y)\tilde{D}(k_x, k_y) + I_\varepsilon(k_x, k_y)/I_H(k_x, k_y)}. \quad (5)$$

### 4. Оптимальная статистическая оценка рельефа по совокупности поля наклонов и альтиметрических данных

Статистическое оценивание основано на формуле Байеса [13], связывающей апостериорную плотность вероятности события с его априорной плотностью вероятности. В силу статистической независимости фурье-компонент стационарного гауссова процесса её можно записать для любой фурье-компоненты и решать задачу независимо для каждой пространственной частоты  $(k_x, k_y)$ . Искомый максимум плотности вероятности рассматриваемой фурье-компоненты рельефа достигается, когда

$$\begin{aligned} \tilde{H}(k_x, k_y)/I_H(k_x, k_y) - \tilde{D}^*(k_x, k_y)(\tilde{h}(k_x, k_y) - \tilde{D}(k_x, k_y)\tilde{H}(k_x, k_y))/I_\varepsilon(k_x, k_y) + \\ + i\mathbf{k}(\tilde{\mathbf{t}}(k_x, k_y) - i\mathbf{k}\tilde{H}(k_x, k_y))/I_\delta(k_x, k_y) = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

Решая это алгебраическое уравнение относительно  $\tilde{H}$ , для наиболее вероятного значения  $\tilde{H}(k_x, k_y)$  получим

$$\tilde{H}(k_x, k_y) = \frac{\tilde{D}^*(k_x, k_y)\tilde{h}(k_x, k_y)/I_\varepsilon(k_x, k_y) - i\mathbf{k}\tilde{\mathbf{t}}(k_x, k_y)/I_\delta(k_x, k_y)}{1/I_H(k_x, k_y) + \tilde{D}^*(k_x, k_y)\tilde{D}(k_x, k_y)/I_\varepsilon(k_x, k_y) + \mathbf{k}^2/I_\delta(k_x, k_y)}. \quad (7)$$

Вычисляя по этой формуле компоненту Фурье  $\tilde{H}(k_x, k_y)$  для каждой пространственной частоты  $(k_x, k_y)$ , получим фурье-образ искомого наиболее вероятного рельефа  $H(x, y)$ . Выполняя над ним обратное преобразование Фурье, получим искомый наиболее вероятный рельеф. Таким образом, мы получаем рельеф  $H(x, y)$  с тем же высоким разрешением, с которым нам известно поле наклонов  $\mathbf{t}(x, y)$  и приблизительно с той же точностью, с которой производится альтиметрическая съёмка района.

Если спектральная плотность  $I_\delta$  равна бесконечности, т.е. информация о наклонах отсутствует, выражение (7) переходит в обычный винеровский фильтр (5) для альтиметрического изображения  $h(x, y)$ . Если же, наоборот, отсутствует альтиметрическая информация, т.е.  $I_\varepsilon = \infty$ , выражение (7) переходит в (3). Если при этом спектральные плотности  $I_H$  и  $I_\varepsilon$  не зависят от пространственной частоты и  $I_H = \infty$ , рельеф  $H(x, y)$  становится решением уравнения Пуассона

$$\Delta H(x, y) = \nabla \mathbf{t}(x, y), \quad (8)$$

которое строго получается из статистического подхода [10], но может быть формально получено простым дифференцированием уравнения (2).

Эффект от этого приёма связан с тем, что, поскольку дивергенция ротора равна нулю, оператор  $\nabla$  обращает в ноль вихревую составляющую измеренного наклона в правой части уравнения (2), которая заведомо имеет шумовое происхождение и должна быть исключена.

Решение вариационной задачи, помимо уравнения (11), даёт ещё и граничное условие для  $H(x, y)$  на границе исследуемого района  $C$ . Когда никаких дополнительных сведений о рельефе района должно выполняться граничное условие Неймана

$$\nabla H(x, y)|_C = \mathbf{t}_n(x, y). \quad (9)$$

## 5. Возможность повышения точности путём учёта альтиметрических данных

Для повышения точности определения рельефа следует сочетать преимущества альтиметрии и фотоклинометрического метода, совокупно обрабатывая при определении рельефа фотометрические и альтиметрические данные. При этом из всех возможных ситуаций можно выделить два наиболее типичных и в некотором смысле противоположных случая.

1. Диаграмма направленности локатора может быть широкой. Результат альтиметрии покрывает весь исследуемый район, имеет форму радиолокационного изображения и характеризуется функцией  $h(x, y)$ . Разрешение, с которым будет получен по таким данным рельеф, будет определяться разрешением изображений, по которым будет определяться поле наклонов.

2. Диаграмма направленности локатора может быть весьма узкой, например, при использовании лазерного дальномера. Результат альтиметрии представлен набором из небольшого числа измерений в отдельных точках. Это позволяет знать  $H(x, y)$  в точно

известном месте с высокой точностью, однако это будет не рельеф  $H(x, y)$ , а лишь набор измерений высоты в отдельных точках.

### 6. Проверка метода на компьютерной модели: альтиметр с широкой диаграммой направленности

Для получения компьютерных моделей была использована созданная в ИРЭ НАН Украины система моделирования, кратко описанная в [14]. Сначала была сгенерирована модель рельефа участка поверхности, типичной для Луны. Среднее по участку значение высоты  $H(x, y)$  было принято равным нулю, а среднеквадратичное  $\sigma_0$  – единице (рис. 1а).

Этот рельеф был использован для моделирования результатов измерения альтиметра с широкой диаграммой направленности в виде функции Гаусса с  $\sigma = 1/16$ , радиус ядра замытия – 32 элемента разрешения (рис. 1б). В полученные таким образом модельные данные вносился аддитивный шум с отношениями сигнал-шум (ОСШ<sub>A</sub>), равными 1, 10, 100 и 1000.

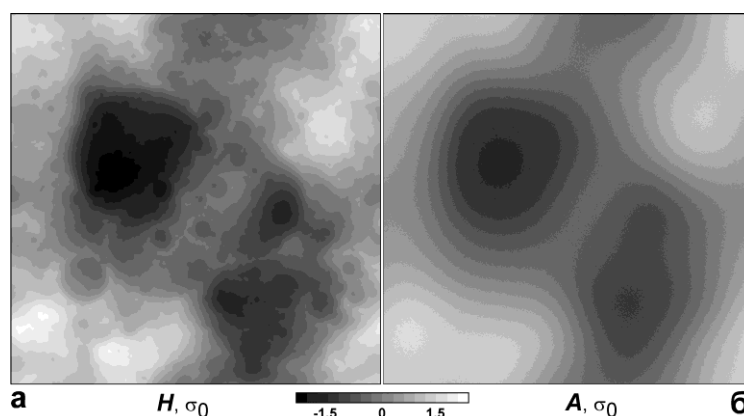


Рис. 1. Исходные данные для тестовых экспериментов: (а) модель рельефа (диапазон высот от  $-2.36\sigma_0$  до  $2.21\sigma_0$ ); (б) модель измерений альтиметра с широкой диаграммой направленности с ОСШ<sub>A</sub> = 10 (диапазон высот от  $-1.91\sigma_0$  до  $1.5\sigma_0$ ). Более светлые участки соответствуют большей высоте.

Также была сгенерирована пара изображений рельефа этого района со взаимно перпендикулярными направлениями освещения и угле падения излучения  $30^\circ$  с отношениями сигнал-шум (ОСШ<sub>и</sub>) равными 1, 10, 100 и 1000 (см. рис. 2). Каждая из полученных таким образом пар изображений использовалась для восстановления рельефа исследуемого участка поверхности.

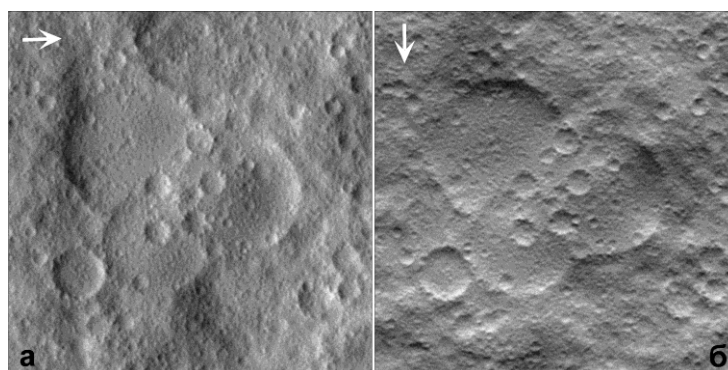
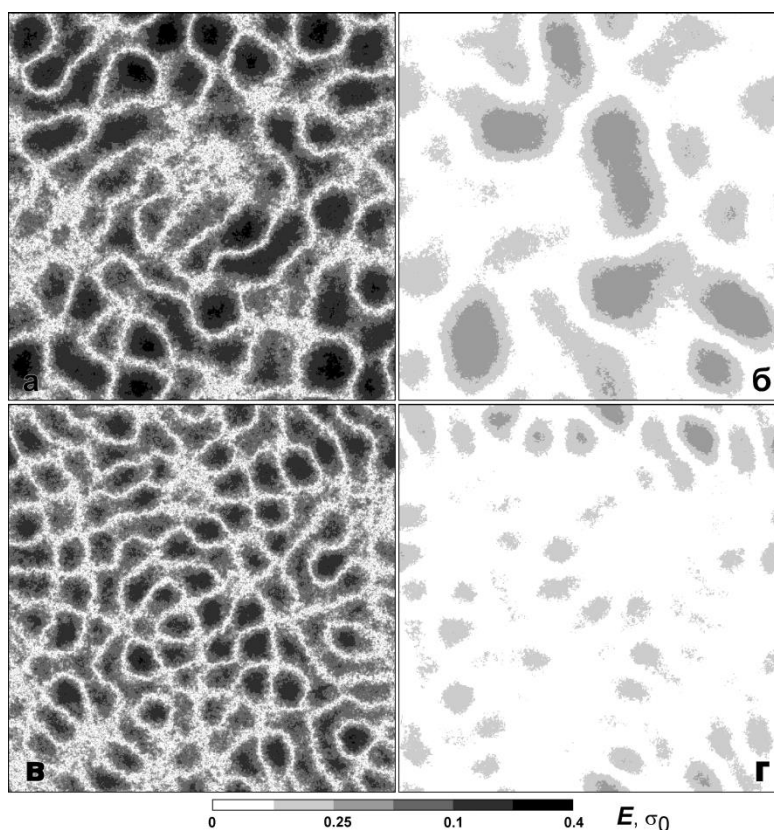


Рис. 2. Пара исходных изображений с ОСШ<sub>и</sub> = 10. Направления освещения поверхности показаны белыми стрелками.

Сначала было выполнено восстановление рельефа только по данным альтиметра с широкой диаграммой направленности для различных отношений сигнал-шум по формуле (5), представляющей собой двумерный аналог винеровского фильтра, затем – только по изображениям без учёта данных альтиметра с широкой диаграммой направленности по формуле (3). И затем, в конце, рельеф данного участка поверхности был восстановлен с использованием фотометрического метода и с учётом данных альтиметра с широкой диаграммой направленности по формуле (8).

Карты модуля погрешностей высот поверхности для указанных вариантов обработки (для некоторых значений отношения сигнал-шум изображений ОСШ<sub>И</sub> и альтиметрических данных ОСШ<sub>А</sub>) показаны на рис. 3. Погрешность определения высот вычислялась как разность значений высоты исходного и восстановленного рельефов. Вычисленные погрешности приведены в таблице 1.

Как и следовало ожидать, улучшение качества исходных данных (увеличение значений ОСШ<sub>А</sub> и ОСШ<sub>И</sub>) позволяет уменьшить погрешности в определении высот. Во всех случаях вычисленное распределение высот (возвышенности и топографические депрессии) качественно соответствует модельному рельефу. Также и размах значений погрешности обычно оказывается меньше по сравнению со случаями использования по отдельности или изображений, или альтиметра.



**Рис. 3.** Карта модуля погрешности определения высот при восстановлении рельефа фотометрическим методом с учётом данных альтиметра с широкой диаграммой направленности: (а) ОСШ<sub>А</sub> = 1 и ОСШ<sub>И</sub> = 1 (максимальное значение модуля погрешности равно  $0.34\sigma_0$ ); (б) ОСШ<sub>А</sub> = 1 и ОСШ<sub>И</sub> = 100 (максимальное значение  $0.048\sigma_0$ ); (в) ОСШ<sub>А</sub> = 100 и ОСШ<sub>И</sub> = 1 (максимальное –  $0.22\sigma_0$ ); (г) ОСШ<sub>А</sub> = 100 и ОСШ<sub>И</sub> = 100 (максимальное –  $0.044\sigma_0$ ). Карта показана в логарифмической шкале.

**Таблица 1. Среднеквадратичная погрешность вычисления высот поверхности по тестовым изображениям с учетом и без учета данных альтиметра с широкой диаграммой направленности.**

ОСШ измерений альтиметра	Среднеквадратичная погрешность вычисления высот				
	Без изображений	ОСШ изображений			
		1	10	100	1000
Без альтиметра	–	0.862	0.464	0.088	0.009
1	0.213	0.088	0.038	0.016	0.007
10	0.208	0.081	0.032	0.013	0.005
100	0.186	0.070	0.028	0.010	0.004
1000	0.183	0.063	0.023	0.008	0.003

### 7. Альтиметр с высоким разрешением

В этом случае альтиметрические данные представлены небольшим числом  $p$  отсчётов  $h_1, h_2, \dots, h_p$  в точках поверхности  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_p, y_p)$ , и покрывают лишь незначительную часть площади района. Теперь минимизации подлежит функционал

$$F(H) = \int [t(x, y) - \nabla H(x, y)]^2 dx dy + \sum_{i=1}^p \left[ h_i - \int D(x - x_i, y - y_i) H(x, y) dx dy \right]^2. \quad (10)$$

Условие равенства нулю вариационной производной от этого функционала по  $H$ , как и раньше, даёт нам уравнение для наиболее вероятного рельефа, однако теперь это уравнение будет интегродифференциальным, и мы встретимся с определёнными сложностями при его решении.

Вместо этого мы пойдём по другому, более простому пути. Будем считать погрешность измерения высоты альтиметром и ширину его диаграммы направленности пренебрежимо малыми, что обычно имеет место для хорошего лазерного альтиметра.

Тогда надо будет минимизировать только первое слагаемое в (10), что приведёт к уравнению Пуассона (8), однако равенство нулю второго слагаемого в (10) даст дополнительное условие, налагаемое на решение уравнения (11). Несмотря на всю проблематичность этого требования при аналитическом рассмотрении задачи, при численном решении его выполнить очень просто. Для этого при решении уравнения (8) методом сеток надо просто дополнить задаваемое программе множество граничных точек точками  $(x_i, y_i)$ ,  $i = 1, \dots, p$ , в которых производились альтиметрические измерения, и задать в них условие Коши

$$H(x_i, y_i) = h_i. \quad (11)$$

### 8. Проверка метода при малом количестве измерений альтиметра

Эффективность метода при такой постановке задачи была проверена на компьютерной модели рельефа, представляющую собой поверхность, модифицированную кратерами. Среднее значение высоты тестового рельефа было принято равным нулю, а сами высоты меняются в пределах от  $-2.86 \sigma_0$  до  $2.49 \sigma_0$ , где  $\sigma_0$  – среднеквадратичное отклонение высот, принятое равным единице.

В настоящей работе обрабатывались пары изображений со взаимно перпендикулярными друг к другу направлениями освещения и отношениями сигнал-шум ОСШ<sub>и</sub>, заданными на уровне 1, 10, 50 и 100. Пример одного из исходных изображений с ОСШ<sub>и</sub> = 10 показан на рис. 4. Положения мест измерений альтиметра на участке поверхности отмечены точками на рис. 4б. На рис. 5 показаны карты модуля

погрешности при определении рельефа только по изображениям (а, б) и с учетом измерений альтиметра (в, г).

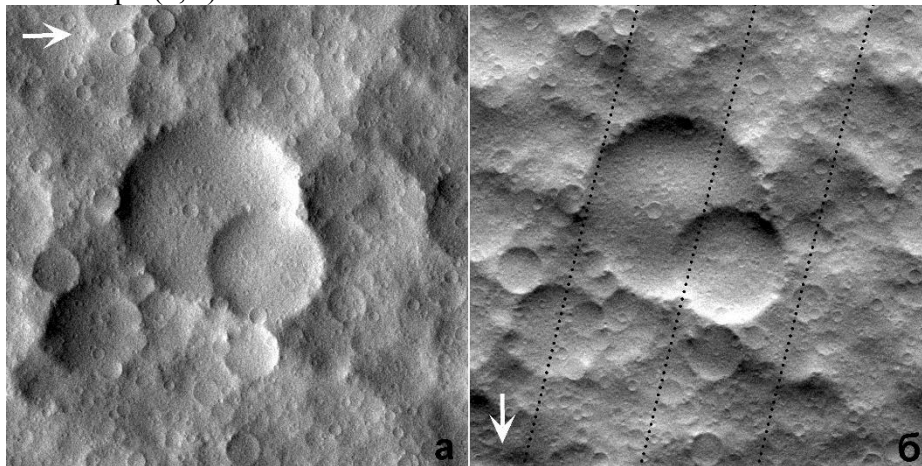


Рис. 4. Пара исходных изображений с  $OSШ_{II} = 10$ , направление освещения поверхности показано белой стрелкой, точками на (б) обозначены положения измерений альтиметра.

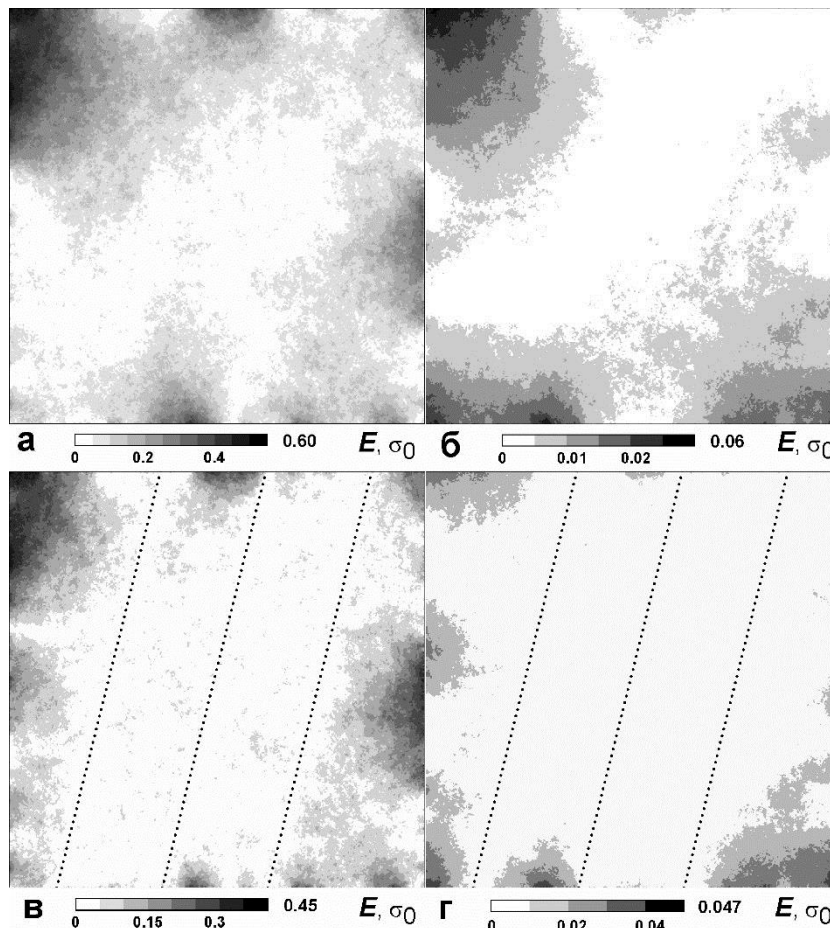


Рис. 5. Пространственное распределение модуля погрешности определения высот фотоклинометрическим методом только по изображениям: (а)  $OSШ_{II} = 1$ , (б)  $OSШ_{II} = 100$ ; и с учетом измерений альтиметра с узкой диаграммой направленности: (в)  $OSШ_{II} = 1$ , (г)  $OSШ_{II} = 100$ .  $\sigma_0$  - стандартное отклонение высот модели рельефа (рис. 4). Положения измерений альтиметра на рисунке обозначены точками.



Пространственное распределение погрешности (рис. 5) при вариантах определения рельефа только по изображениям (а, б) и с учетом измерений альтиметра (в, г) несколько различается. Учет данных альтиметра позволяет существенно улучшить точность определения крупномасштабных деталей поверхности (рис. 5в, г).

Также хорошо видно, что самые большие погрешности расположены по краям участка и их влияние может распространяться достаточно далеко. Это связано с учетом краевого условия Неймана при реализации вычислений с помощью метода конечных разностей.

В таблице 2 показана погрешность определения высот, которая вычислялась как разница между восстановленным и тестовым рельефом для различных значений ОСШ. Рассматривались варианты определения рельефа только по изображениям (Б) и с учетом измерений альтиметра (А). Хорошо видно, что учет данных альтиметра позволил улучшить точность определения рельефа примерно в 1.5-2 раза.

**Таблица 2. Стандартная погрешность вычисления высот (по отношению к среднеквадратичному отклонению  $\sigma_0$  высот модели рельефа) поверхности по тестовым изображениям с учетом (А) и без учета (Б) данных альтиметра, имеющего узкую диаграмму направленности.**

Вариант	ОСШ исходных изображений			
	1	10	50	100
А	0.075	0.019	0.008	0.007
Б	0.106	0.030	0.013	0.016

### Выводы

Использование данных альтиметра при восстановлении рельефа фотоклинометрическим методом позволяет повысить точность вычисления наиболее вероятного рельефа поверхности исходя из доступных изображений, и ускорить процедуру вычислений. Точность определения рельефа выше при использовании измерений альтиметра, имеющего узкую диаграмму направленности.

### Литература

1. Парусимов В. Г., Корниенко Ю. В. Об отыскании наиболее вероятного рельефа поверхности планеты по её оптическому изображению // Астрометрия и астрофизика. – 1973. – Вып. 19. – С. 20-24.
2. Корниенко Ю. В., Дулова И. А., Нгуен Суан Ань Винеровский подход к определению оптических характеристик поверхности планеты по результатам фотометрических наблюдений // Кинематика и физика небесных тел. – 1994. – Т. 10, №5. – С. 69-76.
3. Корниенко Ю.В., Нгуен Суан Ань Определение рельефа и радиооптических параметров участка поверхности с помощью радиолокатора с синтезированной апертурой // Радиофизика и электроника. – Харьков: Институт радиофизики и электроники НАН Украины. – 1996. – 1. – С. 129-133.
4. Дулова И.А., Скуратовский С.И., Бондаренко Н.В., Корниенко Ю.В. Восстановление рельефа поверхности по одиночным изображениям с помощью фотометрического метода // Астрон. вестн. 2008. Т. 42. №6. С. 555–569.
5. Бондаренко Н.В., Дулова И. Д. и Корниенко Ю. В. Топография полигональных структур на Марсе в месте посадки КА “Phoenix” по результатам вычисления рельефа с помощью метода улучшенной фотоклинометрии по изображениям HiRISE // Астрономический вестник, 2014, том 48, № 4, с. 263–279. DOI: 10.7868/S0320930X14040033.

6. Dulova I. A., Bondarenko N. V., Kornienko Yu. V. Involvement of altimetric information into planet surface relief reconstruction from a set of images // MSMW'08 and TERATECH'08 / The 8th International Kharkov Symposium of Physics and Engineering of Microwaves, Millimeter and Submillimeter Waves and Workshop of Terahertz Technologies, Kharkov, Ukraine, June, 2010. – V. 2. – P. 766–768.
7. Van Diggelen, J. A photometric investigation of the slopes and heights of the ranges of hills in the maria of the Moon // Netherlands Astron. Inst. Bull. – 1951. – V. 11. – P. 283-289.
8. Акимов Л.А., Корниенко Ю. В. Рассеяние света лунной поверхностью // Кинематика и физика небесных тел. - 1994. – Т. 10, № 2. - С. 14-21.
9. Кочин Н.Е. Векторное исчисление и начала тензорного исчисления (1965) М.: Наука, 427 с.
10. Парусимов, В. Г. Об отыскании наиболее вероятного рельефа поверхности планеты по её оптическому изображению / В. Г. Парусимов, Ю. В. Корниенко // Астрометрия и астрофизика. – 1973. – Вып. 19. – С. 20 -24. – ISSN: 0367-7966.
11. Корниенко, Ю. В. Винеровский подход к определению оптических характеристик поверхности планеты по результатам фотометрических наблюдений // Кинематика и физика небесных тел. – 1994. – Т. 10, № 5. – С. 69-76. – ISSN: 0233-7665.
12. Lahart, M. J. Local image restoration by a least squares method / M. J. Lahart // Journal of the optical society of America. – 1967. – Vol. 69, No. 10. – P. 1333-339. – ISSN: 0030-3941.
13. Bayes, T. Essay towards solving a problem in the doctrine of chances (1765) / T. Bayes; reproduced with a bibliographic note by G. A. Barnard // Biometrika. – 1958. – V. 45. – P. 293-315. – ISSN: 0006-3444 (print), 1464-3510 (online).
14. Корниенко, Ю. В. Обработка изображений в ИРЭ НАН Украины // Радиофизика и электроника: сб. науч. тр. - Харьков: ИРЭ НАН Украины, 2008. – Т. 13, спец. вып. – С. 423-45. – ISSN: 1028-21X.