Абрамов А.С.
Научный руководитель - старший преподаватель каф. ФПМ Кутарова Е.И.
Муромский институт (филиал) федерального государственного образовательного учреждения высшего образования «Владимирский государственный университет имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»
602264, г. Муром, Владимирская обл., ул. Орловская, 23
e-mail: abramov2898@gmail.com

Основная теорема алгебры. Теорема Гаусса

«Основная теорема алгебры» утверждает, что всякий отличный от константы многочлен над полем комплексных чисел имеет корень. Имеется много различных доказательств этой теоремы, опирающихся на методы из разных областей математики - алгебры, комплексного анализа, топологии. Есть один примечательный аспект, связанный с основной теоремой алгебры: не существует чисто алгебраических ее доказательств. И это не случайно: построение поля R опирается, помимо алгебры, на неалгебраические (топологические) понятия и методы. И хотя переход от R к C является уже чисто алгебраическим, не удается доказать основную теорему, относящуюся к полю комплексных чисел, минуя ключевые топологические факты, относящиеся к полю R (действительных чисел), и их следствия, относящиеся к полю C [1]. Эквивалентная вещественная формулировка «Основной теоремы алгебры» выглядит следующим образом: любой вещественный полином раскладывается в произведение линейных и квадратичных сомножителей.

Существуют разные точки зрения по вопросу, кто первым доказал теорему, которую называют и «теоремой Д'Аламбера», и «теоремой Эйлера-Лагранжа», но чаще всего связывают с именем Гаусса [2].

В 1799 году немецкий математик Карл Фридрих Гаусс предложил свою «Основную теорему алгебры», которая в скором времени была названа «Теорема Гаусса». Гауссом было получено первое строгое доказательство того факта, что всякий многочлен положительной степени (с комплексными коэффициентами) имеет хотя бы один (комплексный) корень. Поясним смысл этой теоремы на примере.

Рассмотрим уравнение $x^4 - 4 = 0$.

Левая часть этого уравнения – многочлен $f(x) = x^4 - 4$.

Основная теорема алгебры утверждает, что этот многочлен может быть разложен на четыре линейных множителя:

$$f(x) = (x+\sqrt{2})\cdot(x-\sqrt{2})\cdot(x+\sqrt{2}i)\cdot(x-\sqrt{2}i).$$

Подставим полученное разложение в данное уравнение:

$$(x+\sqrt{2})\cdot(x-\sqrt{2})\cdot(x+\sqrt{2}i)\cdot(x-\sqrt{2}i) = 0.$$

Приравнивая к нулю каждый из сомножителей, получим четыре корня данного уравнения:

$$x+\sqrt{2}=0,\ x_1=-\sqrt{2};$$
$$x-\sqrt{2}=0,\ x_2=\sqrt{2};$$
$$x+\sqrt{2}i=0,\ x_3=-\sqrt{2}i;$$
$$x-\sqrt{2}i=0,\ x_4=\sqrt{2}i.$$

Данное уравнение имеет четыре корня, ровно столько, какова степень уравнения.

Таким образом, основная теорема алгебры комплексных чисел дает решение проблемы существования корней многочленов.

Литература

1. Яцкин, Н. И. Алгебра: Теоремы и алгоритмы : учеб. пособие / Н. И. Яцкин. — Иваново: Иван. гос. ун-т, 2006. — 506 с.
2. В.М.Тихомиров, В.В.Успенский. *Десять доказательств основной теоремы алгебры*. Матем. просв., 1997, выпуск 1, 50–70.