

СЕКЦИЯ 19

**Физико-математические науки,
математическое моделирование**

Д.Л. Биндас

Муромский институт (филиал) Владимирского государственного университета

602264, г. Муром, ул. Орловская, д. 23

e-mail: uo@mivlgu.ru

Энергетические возможности климата

Современная энергетическая политика обращает все больше внимания на возможности использования возобновляемых экологически чистых источников энергии, таких как солнечная энергия, энергия ветра, тепло Земли, воды, наружного воздуха. Подтверждением этому служит принятая Комиссией Европейских сообществ программа по увеличению доли применения возобновляемых ресурсов до 20 %.

Для того чтобы использовать энергетические возможности климата в практических целях необходимо определить эффективности каждого отдельного показателя климата для региона, где предполагается внедрение разработки. Без подобной оценки становится невозможно точно определить эффективность использования того или другого возобновляемого источника энергии, рассчитать удельное теплopotребление зданий, необходимое для определения соответствия здания нормативам.

Таким образом, задача определения потенциальных энергетических возможностей климата сводится к определению расчетных значений солнечной радиации, скорости и направления ветра, температуры наружного воздуха и учету их совместного сочетания.

При создании математической модели показателей наружного климата важно учитывать возможные взаимные корреляции параметров климата. Применяются три подхода построения математической модели совокупности показателей наружного климата: детерминированный, вероятностный и детерминированно-вероятностный. Детерминированный метод основан на использовании измерений показателей наружного климата каждого географического пункта за многолетний период. Этот подход использует в теплотехнических расчетах ежечасные и срочные показатели климата для данного географического района.

При вероятностном подходе взаимное влияние и изменение климатических показателей является случайным процессом. Показатели климата проявляют взаимные корреляции различного рода. Например, в некоторой географической местности наблюдается сочетание низких температур наружного воздуха с высокими скоростями ветра; в другой – низким температурам соответствуют малые скорости ветра. Вследствие данных трудностей нельзя составить универсального для всех областей и конкретных задач подхода к построению вероятностной математической модели совокупности показателей наружного климата.

Существует ряд задач, для которых необходим анализ климатических показателей без определения их взаимного влияния друг на друга: составление энергетического паспорта здания, расчет удельного теплopotребления. При их выполнении осуществляется оценка температуры наружного воздуха, теплopotупления от солнечной радиации. Неверное определение показателя теплopotуплений от солнечной радиации может привести к неверной оценке теплopotребления здания в течение отопительного периода, необоснованному завышению или занижению расхода энергоносителя. Это в свою очередь ведет к невозможности создания оптимального микроклимата в помещении.

Суммарная (прямая плюс рассеянная) солнечная радиация на горизонтальную поверхность (покрытие, зенитные фонари) Q^{hor} , МДж/м², при действительных условиях облачности за отопительный период для климатического района строительства определяется по формуле:

$$Q^{hor} = \sum_{i=1}^m Q_i^{hor}, \quad (1)$$

где Q_i^{hor} – суммарная солнечная радиация на горизонтальную поверхность при действительных условиях облачности для i -го месяца отопительного периода, МДж/м²; m – число месяцев отопительного периода со среднесуточной температурой наружного воздуха, равной и ниже 8 С.

Например, для г. Муром показатели суммарной солнечной радиации в течение года следующие (методика расчета изложена в СНиП 23.101.2004).

Таблица 1

**Суммарная солнечная радиация (прямая и рассеянная)
на горизонтальную поверхность, МДж/м²**

Месяц	Географическая широта, град, 56° с. ш.
Январь	15
Февраль	46
Март	108
Апрель	170
Май, 1 сутки	7
Октябрь	32
Ноябрь	8
Декабрь	2

Таким образом, теплопоступления от солнечной радиации в течение отопительного периода ($z_{оп} = 214$ суток) составляют $Q^{hor} = 15 + 46 + 108 + 170 + 7 + 32 + 8 + 2 = 388$ МДж/м²

Таблица 2

**Суммарная солнечная радиация (прямая и рассеянная)
на вертикальную поверхность, МДж/м²**

Месяцы отопительного периода	Расчетные характеристики солнечной радиации для определения количества суммарной солнечной радиации на вертикальную поверхность									
	S_i^{hor} , МДж/м ²	k_{ij}		S_{ij}^{ver} , МДж/м ²		D_i^{hor}	D_i^{ver}	Q_i^{hor}	Q_i^{ver} , МДж/м ²	
		С	Ю	С	Ю				МДж/м ²	
Январь	15	—	4,15	—	62,2	47	23,5	61	47	109
Февраль	46	0,05	2,32	2,3	106,7	88	44	135	98	203
Март	108	0,14	1,35	15,1	145,8	184	92	292	211	342
Апрель	170	0,22	0,84	37,4	142,8	224	112	394	210	316
Май, 1 сутки									9	12
Октябрь	32	0,09	1,72	2,9	55	85	42,5	117	61	113
Ноябрь	8	0,02	3,18	0,2	25,4	40	20	49	32	57
Декабрь	2	—	4,9	—	9,8	30	15	32	26	36
За отопительный период									694	1188

Суммарная (прямая и рассеянная) солнечная радиация на вертикальную поверхность (стены и окна) Q_j^{ver} , МДж/м², при действительных условиях облачности за отопительный период определяется по формуле:

$$Q_j^{ver} = \sum_{i=1}^m (S_j^{hor} \cdot k_{ij} + D_j^{hor} / 2), \quad (2)$$

где S_j^{hor} , D_j^{hor} – прямая и рассеянная солнечная радиация на горизонтальную поверхность при действительных условиях облачности в i -м месяце отопительного периода, МДж/м²; m – число месяцев отопительного периода со среднесуточной температурой наружного воздуха, равной и ниже 8 °С; k_{ij} – коэффициент пересчета прямой солнечной радиации с горизонтальной поверхности на вертикальную i -го месяца отопительного периода для j -й ориентации, принимается по данным таблицы.

Необходимо отметить, что кроме прямой и рассеянной радиации можно учитывать также отраженную радиацию. Однако при современном многоэтажном строительстве учет отраженной радиации приведет к завышению расчетных теплопоступлений в помещения и необосно-

ванному снижению расчетной величины энергопотребления здания. Учет отраженной радиации целесообразен при определении летней тепловой нагрузки на системы вентиляции и кондиционирования воздуха, когда он влияет на мощность системы, обслуживающей нижние этажи зданий.

Таким образом, были описаны показатели климата, характеризующие его энергетические возможности. Представлены расчеты, показывают важность учета данных климатических параметров при проектировании зданий, систем отопления и вентиляции.

Литература

1. СНиП 23–02–2003. Тепловая защита зданий. – М.: Госстрой России, ФГУП ЦПП, 2004.
2. Научно-прикладной справочник по климату СССР. Ч. 1–6. Вып. 1–34. – СПб.: Гидрометеиздат, 1989–1998.
3. СП 23–101–2004. Проектирование тепловой защиты зданий. – М.: ФГУП ЦПП, 2004.
4. МГСН 2.01–99. Энергосбережение в зданиях. Нормативы по теплозащите и тепловодо-электрообеспечению. – М.: ГУП НИИАС, 1999.
5. СНиП 23–01–99*. Строительная климатология. – М.: Госстрой России, ГУП ЦПП, 2003.
6. Строительная климатология: справ. пособие к СНиП. – М.: Стройиздат, 1990.

Математическая модель регуляции систолического артериального давления в моменты стрессовых ситуаций

Актуальность. В настоящее время одной из самых актуальных проблем кардиологии является гипертоническая болезнь (ГБ). В России около 40 % взрослого населения страдает ГБ. Она способствует ускоренному развитию атеросклероза и ишемической болезни сердца. Развитие ГБ вызвано стойким повышением артериального давления (АД), важнейшего параметра, характеризующего работу кровеносной системы. Возникновению заболевания способствуют различные стрессовые ситуации (часто повторяющееся нервное перенапряжение, длительные и сильные волнения и т. д.) В связи с этим актуальным является построение математических и компьютерных имитационных моделей АД [1] в моменты стресса.

Цель работы: построение стохастической модели регуляции систолического артериального давления (САД) по данным суточного мониторингирования АД (СМАД).

Материалы и методы. В исследование включено 117 пациентов с ГБ второй стадии, 46 женщин и 71 мужчина. Пациенты находились под наблюдением в Областном центре артериальной гипертонии Ульяновского клинического госпиталя ветеранов войн в период с 2008-2010 гг.

СМАД проводилось с использованием носимого монитора «BPLab МнСДП-3» (ООО «Петр Телегин», Нижний Новгород). Статистическая обработка данных была проведена с помощью пакета прикладных программ BPLab (ООО «Петр Телегин», Нижний Новгород). Для реализации компьютерной модели выбран язык программирования Borland Delphi 7.0 (Borland, USA).

Математическая модель.

АД человека значительно колеблется в течение суток в зависимости от его эмоционального и физического состояния. Повышение АД часто вызвано различными стрессовыми ситуациями. Стресс приводит к усиленной секреции в коре надпочечников «стрессового» гормона кортизола, который затем выбрасывается в кровь, повышая уровень АД. Чтобы нормализовать давление, организм запускает гомеостатические процессы, снижающие выработку кортизола и понижающие АД.

В настоящей работе математическая модель регуляции САД в моменты стрессовых ситуаций представляет собой частично-наблюдаемую систему линейных стохастических дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} dC_t = d\pi_t - \beta C_t dt \\ dY_t = \alpha C_t dt - \lambda Y_t dt + \sigma dW_t \end{cases}$$

с начальными условиями $C_0 = 0, Y_0 > 0$.

Здесь стохастический процесс $C = (C_t)_{t \geq 0}$ — уровень кортизола в крови (время t в часах), $\pi = (\pi_t)_{t \geq 0}$ — стандартный пуассоновский процесс с интенсивностью $\mu \geq 0$. Процесс $d\pi_t$ обозначает выброс в кровь кортизола в момент стресса. Тогда процесс уменьшения количества кортизола имеет вид $(-\beta)C_t$, где $\beta > 0$ — коэффициент отрицательной обратной связи (коэффициент затухания).

Стохастический процесс $Y = (Y_t)_{t \geq 0}$ обозначает уровень САД в мм рт. ст. Процесс повышения САД под действием кортизола имеет вид αC_t , где $\alpha > 0$ — коэффициент роста. Гомеостатический процесс регулирования САД обозначим как $(-\lambda)Y_t$, где $\lambda > 0$ — коэффициент отрицательной обратной связи (коэффициент затухания). Другие факторы, влияющие на уровень САД (время года, температура воздуха, употребление кофе и т. д.), имеют вид σdW_t , где $W = (W_t)_{t \geq 0}$ — стандартный винеровский процесс, а $\sigma \neq 0$ — пропорциональный коэффициент. Процессы π и W независимы.

Случайные процессы C и Y являются стационарными, эргодическими. Процесс C совершает скачки в моменты времени, совпадающие с моментами скачков пуассоновского процесса π . Процесс Y непрерывный, имеет множественные разладки. Моменты их возникновения совпа-

дают с моментами скачков процесса π . Разладка интерпретируется как возникновение стрессовой ситуации. Она частично компенсируется гомеостатическим процессом $(-\lambda)Y_2$.

Предполагается, что в данной системе уравнений процесс C ненаблюдаемый. Наблюдать можно лишь процесс Y , который содержит неполную информацию о процессе C .

Выводы. В работе построены математическая и компьютерная имитационная модели регуляции САД в моменты стрессовых ситуаций. Предложенная система может быть усложнена в зависимости от конкретной решаемой задачи, например, при добавлении новых компонентов, влияющих на САД. Полученные результаты применимы для решения широкого класса прикладных задач в области биологии и медицины.

Литература

1. Марковский М. В., Ефимов А. В. Математическая модель динамики артериального давления / М.В. Марковский, А.В. Ефимов // Научная сессия МИФИ-2000. Сб. науч. тр. Т. 2. Информатика и процессы управления. Информационные технологии. Сетевые технологии и параллельные вычисления.— М., 2000.— С. 118-119.

Начала термодинамики и формулировка закона «структурировано всё»

Энтропия S в термодинамике – мера необратимого рассеяния энергии; в теории систем – величина, обратная уровню организации системы; степень неупорядоченности открытой системы; при организмическом подходе [1] – величина, обратно пропорциональная организму Θ , – $\Theta = 1/S$, показывающая уровень уменьшения организованности структуры [2]. В общем случае температура T определяется, как производная от энергии [тела] в целом E по его энтропии S так – $T = \partial E / \partial S$. В термодинамике абсолютная температура T определяется через обратную величину $1/T$, равную производной энтропии S по средней энергии системы при постоянстве остальных параметров x , – $1/T = (\partial S / \partial E)_x$. Из этого следует, что отрицательная температура (по отношению к «абсолютной») означает убывание энтропии с ростом средней энергии, или

$$1/T = [\partial(1/\Theta) / \partial E]_x \rightarrow 1/T = -\Theta_{Ex}^{-2} \rightarrow T = -\Theta_{Ex}^2 \rightarrow -T = \Theta_{Ex}^2 \rightarrow \Theta_{Ex} = \sqrt{-T} \quad (1)$$

Выражение (1) имеет решение в области действительных значений только в том случае, если температура отрицательна, то есть если средняя энергия растёт, а энтропия убывает. Иными словами, *организация [системы] происходит при росте средней энергии и с убыванием энтропии*. В термодинамике понятие «энтропия» применено во втором начале термодинамики: *в замкнутой системе энтропия S при любом реальном процессе либо возрастает, либо остаётся неизменной*, то есть – $dS \geq 0$. В состоянии равновесия энтропия замкнутой системы достигает максимума, и никакие макроскопические процессы в такой системе, согласно второму началу термодинамики, невозможны.

Приращение энтропии системы в единицу времени называют *производством энтропии*. Согласно второму началу термодинамики, в замкнутой изолированной системе энтропия, возрастая, стремится к своему равновесному максимальному значению, а производство энтропии – к нулю. В этом случае выражение (1) не имеет решений в области действительных значений: *[система] – разорганизовывается*. Между тем, в формулировке второго начала термодинамики есть проблемные участки. Так, возьмём в любой замкнутой системе два одинаковых [тела, обладающие только массой] – организма, находящихся в равновесном состоянии. Из условия, в этой [системе] отсутствуют любые силы, внешние по отношению к [телам]-организмам. Согласно второму началу термодинамики, никаких процессов в этой [системе] происходить не будет. Однако это не так. В работе [3] представлен общий вид закона «Коммуникативно всё» для любой пары взаимодействующих организмов (2):

$$F_{ij} = s_s \Theta_{si} \Theta_{sj} / r_{ij}^2 \quad (2)$$

Частный случай этого закона для организмов из нашего примера – [одинаковых тел, обладающих только массой] – известен как «закон гравитации Ньютона» (3):

$$F_g = 2m_1 m_2 / r^2. \quad (3)$$

Из выражения (3) видно, что оба организма [тела] будут притягиваться друг к другу силой гравитации, причём тем большей, чем будет меньше расстояние между ними. Движение организмов навстречу друг другу примет ускоренный характер и закончится объединением двух организмов в один – организм Θ_y . Таким образом, получим ситуацию, описанную выражением (1) – *формирование организма приводит к росту его средней энергии с одновременным уменьшением его энтропии*.

В связи со сказанным, следует уточнить формулировку второго и третьего начал термодинамики. Напомним, второе начало термодинамики в прежнем виде устанавливает: *в замкнутой системе энтропия S при любом реальном процессе либо возрастает, либо остаётся неизменной*, то есть – $dS \geq 0$.

Третье начало термодинамики в прежнем виде устанавливает: *энтропия S любой системы стремится к конечному для неё пределу, не зависящему от давления, плотности или фазы, при стремлении температуры T к абсолютному нулю, то есть при $T \rightarrow 0$ значение $dS \rightarrow 0$* . М. Планк сформулировал третье начало термодинамики как условие обращения в нуль энтропии всех тел при стремлении температуры к абсолютному нулю: $\lim_{T \rightarrow 0} S = 0$. Очевидно, что выра-

бывшая третье начало термодинамики, исследователи исходили из того, что температура [системы] стремится к нулю только из области положительных значений. Однако при одновременном равенстве нулю T и S выражение $T = dE/dS$ не имеет смысла $\rightarrow 0 = dE/d0$.

Очевидно, второе и третье начала термодинамики противоречат друг другу. А именно, второе начало устанавливает обязательное возрастание энтропии, а третье – обязательное стремление того же параметра к нулю. Но обязательными не могут быть два одновременных процесса, направленных противоположно. Указанное противоречие удаётся разрешить, если второе начало термодинамики переформулировать следующим образом: *в любой замкнутой системе энтропия S стремится к нулю, то есть: $S \rightarrow 0$; $dS < 0$* . А третье начало термодинамики – следующим образом: *организация любой системы самопроизвольно стремится к конечному для неё пределу – 1, при достижении которого определение температуры не имеет смысла – $T = ?$, энергия организма максимальна – max , а энтропия системы, содержащей данный организм, равна 0, то есть: $\lim \Theta_n \rightarrow 1$; $\lim_{\Theta_n \rightarrow 1} E_n \rightarrow max$; $\lim_{\Theta_n \rightarrow 1} S_{n+1} \rightarrow 0$* .

В итоге мы получаем формулировку закона Организмики «Структурировано всё»:

1) $\Theta_{Ex} = \sqrt[3]{(-T)}$; 2) $\lim^{i+1} \Theta_n \rightarrow 1$; 3) $\lim_{\Theta_n \rightarrow 1} E_n \rightarrow max$; 4) $\lim_{\Theta_n \rightarrow 1} S_{n+1} \rightarrow 0$.

Или словами: *любая совокупность организмов за счёт собственных коммуникативных возможностей стремится к формированию одного единственного организма ($\lim \Theta_n \rightarrow 1$) более высокого уровня $n+1$ с объединением в нём максимального числа возможностей (энергий; $\lim E_n \rightarrow max$) и полным устранением внешней конкуренции ($\lim S_{n+1} \rightarrow 0$)*.

Физический смысл выражения (4а) – $\Theta_{Ex} = \sqrt[3]{(-T)}$ – рассмотрим на примере двух компонентов одного космического тела. До момента объединения компоненты будущего единого космического тела являются типичными представителями организмического уровня $^1\Theta$. Каждый из них под действием закона тяготения приобретает скорость 1T_1 и 1T_2 соответственно. С точки зрения наблюдателя, неосведомлённого в мотивах такого движения, движение компонентов является ничем иным, как собственно движением. Для описания такого движения применяется температура – физическая величина, характеризующая среднюю кинетическую энергию частиц макроскопической системы, находящейся в состоянии термодинамического равновесия.

В момент соединения компонентов выполняется условие $\lim \Theta_n \rightarrow 1$ (9а), и космическое тело остаётся в пространстве в единичном виде. Тогда же выполняется и другое условие – $\lim_{\Theta_n \rightarrow 1} E_n \rightarrow max$ (9б), которое учитывает переход кинетической энергии двигавшихся компонентов во внутреннюю энергию единого космического тела. И тогда же выполняется третье условие – $\lim_{\Theta_n \rightarrow 1} S_{n+1} \rightarrow 0$ (9с), которое показывает, что суммарный объект является ничем иным, как переходом на вышестоящий организмический уровень – $^2\Theta$, на котором, ввиду отсутствия других тел, потери невозможны, энтропия этого уровня равна нулю. Меняя положение наблюдателя с уровня $^1\Theta$ на уровень $^2\Theta$, получаем, что, с его точки зрения, на новом уровне $^2\Theta$ температура этого уровня является абсолютной и она равна нулю (пока на тело не подействует сила). Формирование же тела уровня $^2\Theta$ происходило с предыдущего уровня $^1\Theta$ за счёт движения-температуры из области отрицательных по отношению к уровню $^2\Theta$ температур. Для компенсации этой «отрицательности» в подкоренной части выражения (4а) – $\Theta_{Ex} = \sqrt[3]{(-T)}$ перед обозначением температуры стоит знак «минус».

Заключение: 1) Предложена формулировка закона «структурировано всё»; 2) Устранено противоречие между вторым и третьим началами термодинамики при рассмотрении любой замкнутой системы, как системы многоуровневой организации.

Литература

1. Дикусар, В.В. Системный анализ и Организмика: от частного к общему / В.В. Дикусар, А.А. Тюняев // Динамика неоднородных систем / под ред. чл.-корр. РАН Ю.С. Попкова.– Институт системного анализа РАН.– 2008 г.– Т. 32.– № 3.
2. Тюняев, А.А. Организмика – фундаментальная основа всех наук. Т. I / А.А. Тюняев.– М.: Ин, 2004.
3. Тюняев, А.А. Закон «коммуникативно всё» как первый фактор обобщения взаимодействий различной природы / А.А. Тюняев.– 2009.

М.А. Карпова, Ш.И. Галиев

Казанский государственный технический университет им. А.Н. Туполева

г. Казань, ул. К. Маркса, д. 10

e-mail: m-akm@mail.ru; sh.galiev@mail.ru

Использование многократных областей Вороного для выбора расположений станций обслуживания

Исследуются бисекторы и области Вороного для $l_{Kp\theta}$ метрики, являющейся обобщением взвешенной l_p метрики. Выявлены некоторые свойства, и рассмотрено приложение к выбору расположения станций обслуживания.

Оптимизация расположения станций обслуживания важна для определения местоположений станций сотовой связи, беспроводного Интернета, экологического мониторинга, скорой помощи, пожарной охраны, служб спасения и т. п. При оптимизации расположения станций обслуживания важны как критерии оптимизации, так и способы определения расстояний от станции до обслуживаемых клиентов. Также важно построение областей обслуживания отдельной станции, выявление их свойств.

При определении расстояний можно использовать готовые матрицы расстояний или геоинформационные системы типа ArcInfo, MapInfo, Панорама, ArcGIS или функции оценки расстояний. Использование матрицы расстояний для n точек требует $O(n^2)$ памяти. Матрицы расстояний и геоинформационные системы сложно использовать для анализа областей обслуживания отдельных станций – областей Вороного. Поэтому во многих работах используются функции для оценки расстояний, которые порождают некоторую метрику на рассматриваемой области. Выбор метрики зависит от свойств рассматриваемой области и существующих связей центра с клиентами. Критерии оптимизации определяются, исходя из целей оптимизации.

В литературе используются различные метрики: евклидова, взвешенная l_p – метрика, взвешенная l_p – метрика с возможным поворотом осей координат, манхэттенская, московская, и ряд других метрик. В настоящее время достаточно общей является $l_{Kp\theta}$ метрика [1], являющаяся обобщением взвешенной l_p метрики с возможными поворотами осей координат на угол θ . При оптимизации расположения станций обслуживания мы используем именно эту метрику, подбирая для конкретной области все параметры этой метрики. Для определения этой метрики сначала вводим расстояние между точками $s(x_1, y_1)$ и $t(x_2, y_2)$ следующим образом:

$$d(s, t) = l_{Kp}(s, t) = \left[k_1 |x_1 - x_2|^p + k_2 |y_1 - y_2|^p \right]^{\frac{1}{p}}, \quad (1)$$

где $K = (k_1, k_2)$, $k_1, k_2 \geq 0$, $p \geq 1$.

Для $p = \infty$ полагаем $d(s, t) = l_{K,\infty}(s, t) = \max(k_1 |x_1 - x_2|, k_2 |y_1 - y_2|)$.

При $k_1 = k_2$ метрика l_{Kp} является взвешенной l_p – метрикой, при $k_1 = k_2 = 1$ получаем l_p – метрику. а при $k_1 = k_2 = 1$ и $p = 2$ – обычную евклидову метрику. Для лучшего подбора функции расстояния для исследуемой области также вводят повороты осей координат на угол θ , $0 \leq \theta \leq \pi/2$, в результате и получаем $l_{Kp\theta}$ метрику. При исследовании областей Вороного повороты можно не учитывать, так как повороты не меняют качественную картину этих областей, следовательно, на этом этапе можно рассматривать только l_{Kp} метрику.

Исследованию областей Вороного при евклидовой метрике посвящены множество работ, например, [2]. В соотношении (1) вынесем множитель k_1 за скобки, а $[k_1/k_2]^{1/p}$ обозначим через k . Тогда $l_{Kp}(s, t) = k_1^{1/p} \left[|x_1 - x_2|^p + k^p |y_1 - y_2|^p \right]^{1/p}$. Так как коэффициент $k_1^{1/p}$

не влияет на качественную картину областей Вороного, то вместо $l_{kp}(s, t)$ вводим $l_{kp}^*(s, t) = \left[|x_1 - x_2|^p + k^p |y_1 - y_2|^p \right]^{1/p}$, здесь вместо вектора $K = (k_1, k_2)$ рассматривается параметр $k, k > 0$.

В докладе проводится исследование бисекторов и областей Вороного для l_{kp}^* метрики. Выявлены свойства бисекторов, в частности, выявлены случаи, когда бисекторы представляют собой прямые или иные одномерные линии, а также случаи, когда они представляют собой объединение одномерных линий и двумерных областей. Установлено, когда при малых изменениях положений точек (обслуживающих центров) существенно меняются положения бисекторов. Эти свойства используются при построении областей Вороного и многократных областей Вороного на плоскости P .

Для k -кратных ($k \geq 1$) областей Вороного при l_{kp}^* метрике установлено важное свойство, именно, доказано следующее предложение.

Предложение. Для множества точек $s = \{c_1, c_2, \dots, c_n\}$ на плоскости P k -кратная ($k \geq 1$) область Вороного $V_j^k, 1 \leq j \leq n, 1 \leq k \leq n$, является звездно-выпуклой областью на P .

Это предложение позволяет сделать вывод, что и для $l_{kp\theta}$ метрики k -кратные ($k \geq 1$) области Вороного будут являться звездно-выпуклыми областями на плоскости P .

Оптимизация расположения станций обслуживания проводилась для территории Татарстана. Для более подходящего подбора метрики территория Татарстана была поделена на три части. Для каждой из этих частей подбирались свои параметры указанной метрики. Затем, применяя алгоритмы работы [3], в частности, и с использованием многократных областей Вороного, проводилась оптимизация, и находились требуемые области Вороного – области обслуживания отдельных станций. Проведенные расчеты показали результативность такого подхода.

Литература

1. Uster, H., Love, R.F. Application of weighted sum of order p to distance estimation / H. Uster, R.F. Love // IIE Transactions 33(8), 2001, p. 675-684.
2. Facility location: A survey of applications and methods / Drezner (editor). Springer-Verlag, N.Y., 1995, 572 p.
3. Галиев, Ш.И. Оптимизация многократного покрытия ограниченного множества кругами / Ш.И. Галиев, М.А. Карпова // Журнал вычисл. матем. и матем. физ. – Т. 50(2010). – № 7. – С. 757-769.

Математическое моделирование экономических систем управления

Системный анализ позволяет учесть и использовать в управлении всю имеющуюся информацию об управляемом объекте, согласовать принимаемые решения с точки зрения объективного, а не субъективного, критерия эффективности. ЭВМ не только позволяет учесть всю информацию, но и избавляет от ненужной информации, а всю нужную пускает в обход человека, предоставляя ему только самую обобщенную информацию. Системный подход в экономике эффективен и сам по себе, без использования ЭВМ, как метод исследования, при этом он помогает использовать экономические законы.

В процессе исследования нецелесообразно или невозможно иметь дело непосредственно с самим объектом. Удобнее заменить его другим, подобным. При моделировании используется аналогия между объектом-оригиналом и его моделью. Аналогии могут быть следующими: внешняя аналогия; структурная аналогия (например, с помощью графов); динамическая аналогия, описывающая поведение системы во времени.

Реализация стратегии управления предприятием подвержена объективно существующей и принципиально неустранимой неопределенности. Возможность отклонения от поставленной цели, несовпадения фактически полученного результата от намеченного в момент принятия решения, характеризуется такой категорией как риск. В связи с тем, что при поэтапной реализации стратегии предполагается принятие последовательных промежуточных решений, то каждому из них будут свойственны свои факторы риска.

Рассмотрим модель стратегии управления предприятием с учетом возможных факторов риска. Процесс управления реализацией намеченного проекта состоит из нескольких этапов. На каждом этапе возможны альтернативные направления реализации этого процесса. Каждое из направлений характеризуется вероятностью возникновения ущерба, связанного, например, с конъюнктурой рынка, срывом поставок комплектующих и так далее, а также величиной этого ущерба и возможной прибылью. Необходимо разработать такую стратегию управления, которая позволила бы реализовать проект с максимальной прибылью при допустимом уровне затрат.

Математическую модель рассматриваемой стратегии можно представить следующим образом.

1. Имеющиеся данные: $M = \{1, \dots, m\}$ – множество этапов реализации проекта, на каждом из которых действуют соответственно свои факторы риска; $N = \{1, \dots, n\}$ – множество возможных вариантов реализации (состояний) проекта; (p_{kij}) – матрица вероятностей возникновения ущерба при переходе реализации проекта из k -го этапа на i -й этап по j -му направлению ($k = 0, \dots, m; i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n$); $k = 0$ – исходный этап реализации проекта; (a_{kij}) – матрица затрат (возможного ущерба) при переходе реализации проекта из k -го этапа на i -й этап по j -му направлению ($k = 0, \dots, m; i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n$); (b_{kij}) – матрица ожидаемой прибыли при переходе реализации проекта из k -го этапа на i -й этап по j -му направлению.

2. Переменные задачи: $x_{bij} = 1$, если из k -го этапа осуществлен переход на i -й этап по j -му направлению, в противном случае $x_{bij} = 0$.

3. В задаче требуется найти такую стратегию $X = (x_{kij})$ управления реализацией проекта из множества допустимых, при которой ожидаемый эффект будет максимален, а возможные потери будут не больше допустимых. Следовательно, необходимо найти максимум целевой функции

$$Z(x_{bij}) = \sum_{k=0}^n \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{bij} (1 - p_{bij}) b_{bij} \rightarrow \max \text{ при заданной системе ограничений}$$

$$\sum_{k=0}^n \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n p_{bij} a_{bij} x_{bij} \leq Ag.$$

Данная задача является задачей дискретного динамического программирования, несмотря на наличие в целевой функции вероятностных характеристик, так как на каждом этапе управ-

ления предполагается известной (оцененной) вероятностью потерь при выборе того или иного альтернативного направления реализации проекта. Например, стратегией управления предприятием является разработка проекта по производству некоторой продукции, состоящего из следующих этапов: выбора инвестора, выбора поставщика, производства и сбыта продукции.

На первом этапе реализации проекта имеется возможность использования услуг нескольких инвесторов, каждый из которых с учетом принятых обозначений характеризуется следующими величинами.

Инвесторы (поставщики, варианты сбыта продукции)			
1	2	...	n
P_{011}	p_{012}	...	p_{01n}
a_{011}	a_{012}	...	a_{01n}
b_{011}	b_{012}	...	b_{01n}

Лицом, принимающим решение, оцениваются вероятности возможного ущерба исходя из матрицы затрат и матрицы ожидаемой прибыли. Вероятности возникновения ущерба при выборе того или иного инвестора должны составлять в сумме единицу. Второй этап реализации проекта может характеризоваться, например, предложениями по поставке сырья от различных поставщиков с аналогичными характеристиками. На этапе производства и реализации продукции с учетом различных объемов производства возможны различные варианты сбыта. Математическое ожидание ущерба или допустимый риск при реализации выбранной стратегии управления не должен превышать Ag денежных единиц.

Точное решение такой задачи может быть найдено с помощью алгоритма, построенного на основе одной из вычислительных схем сокращенного перебора вариантов, например, метода ветвей и границ. Реализация метода ветвей и границ в вычислительный алгоритм связана с определенными трудностями: необходимо задать правило ветвления вариантов, требуется задать процедуру оценки вариантов решений, необходимо вносить большие массивы информации на электронные носители и так далее. На практике эти трудности можно преодолеть на основе эвристических рассуждений при построении алгоритма решения.

Для рассматриваемой задачи алгоритм решения может быть построен с помощью следующих эвристических правил.

1. Обеспечение максимума прибыли на каждом этапе реализации стратегии управления

$$\forall_i \rightarrow j = \arg \max_{j \in N} b_{kij} (1 - p_{kij}), k \succ i.$$

2. Обеспечение минимума потерь на каждом этапе

$$\forall_i \rightarrow j = \arg \max_{j \in N} p_{kij} a_{kij}, k \succ i.$$

3. Обеспечение максимума удельной прибыли на каждом этапе

$$\forall_i \rightarrow j = \arg \max_{j \in N} \frac{b_{kij} (1 - p_{kij})}{p_{kij} a_{kij}}, k \succ i.$$

Н.А. Лазуткина, С.Л. Лазуткин

Муромский институт (филиал) Владимирского государственного университета

602264, г. Муром, ул. Орловская, д. 23

тел. (49234)77254, e-mail: center@mivlgu.ru

Математическое описание нагрузок в приводе металлообрабатывающего станка с помощью модели полигауссова случайного процесса

Металлообрабатывающие станки относятся к категории технологических машин, при работе которых в деталях исполнительных механизмов возникают значительные динамические нагрузки; в изучении которых существуют два направления – теоретическое и экспериментальное. Теоретическое направление основано на методах теории динамических систем, взаимодействующих с обрабатываемым материалом, изменение свойств которого носит случайнo-статистический характер. Это направление имеет ряд принципиальных преимуществ. Однако громоздкость математического описания обрабатываемого материала, как объекта разрушения, а также сложность станков как динамических систем не позволяют определить аналитическим методом нагрузки, адекватно отображающие реальную нагруженность узлов и деталей. Поэтому изучение нагрузок во многих случаях осуществляется экспериментально, путем их тензометрирования при работе станков в условиях эксплуатации.

Полученные таким образом данные подвергают статистической обработке с применением методов теории случайных функций. Поскольку алгоритмы оценивания вероятностных характеристик оптимизируются для определенных классов случайных функций, то возникает задача построения математической модели, достаточно точно аппроксимирующей экспериментально полученные реализации нагрузок в узлах и деталях станков. Ограничимся вопросами математического описания нагрузок, адекватно отображающего свойства реальных нагрузок относительно совокупности вероятностных характеристик, используемых при расчете зубчатых передач привода исполнительного органа на усталостную долговечность. В этом случае необходимо знать следующие вероятностные характеристики расчетных нагрузок: среднее число максимумов и среднее число «нулей» в единицу времени, распределение вероятностей максимумов, совместные плотности распределения вероятности нагрузки и двух ее первых производных, совместное распределение нагрузки и ее производной, трехмерную плотность распределения вероятностей нагрузки.

В качестве статистической модели расчетных нагрузок в приводе исполнительного органа примем полигауссовый широкополосный случайный процесс. Случайный процесс называется [1] полигауссовым, если его плотность распределения вероятностей может быть представлена смесями гауссовых распределений

$$f_1(x) = \sum_n g_n \omega_n(x), \quad (1)$$

где g_n – «взвешивающие» множители, для которых выполняется условие $\sum_n g_n = 1$; $\omega_n(x)$ – гауссова плотность распределения вероятностей n -й компоненты процесса

$$\omega_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} \exp\left\{-\frac{(x-a_n)^2}{2\sigma_n^2}\right\}.$$

Выбор именно этого класса случайных процессов в качестве модели нагрузок в приводе продиктован двумя соображениями. Во-первых, с помощью (1) уже при $n=2,3$ возможно получить семейство кривых достаточно точно аппроксимирующих распределения вероятностей нагрузок в приводе различных типов металлообрабатывающих станков. Во-вторых, при использовании линейной гипотезы накопления усталостных повреждений оказывается возможным, вследствие инвариантности полигауссовых моделей относительно линейных преобразований, воспользоваться результатами, полученными при разработке методов расчета на усталостную прочность при случайных напряжениях, имеющих гауссово распределение вероятностей. Это обстоятельство имеет важное значение, так как именно для гауссовых случайных напряжений получены наиболее значительные результаты при расчете на усталостную прочность.

Полагая, что нагрузки в приводе металлообрабатывающих станков имеют плотность распределения вероятностей в виде (1), найдем выражения для указанной выше системы вероятностных характеристик.

На основании методов теории стационарных случайных функций [2] имеем

$$\varphi(x) = -\frac{1}{\mu_{\max}} \int_{-\infty}^0 \ddot{x} \psi_3(x, o, \ddot{x}) d\ddot{x}, \quad (2)$$

$$\mu_{\max} = -\int_{-\infty}^0 \ddot{x} \psi_2(o, \ddot{x}) d\ddot{x}, \quad (3)$$

$$\mu_c = \int_{-\infty}^0 |x| \psi_1(o, \dot{x}) d\dot{x} \quad (4)$$

Здесь $\varphi(x)^{-\infty}$ – плотность распределения вероятностей максимумов нагрузки; $\mu_{\max}$ – среднее число максимумов нагрузки в единицу времени; $\psi_3(x, \dot{x}, \ddot{x})$ – совместная плотность распределения вероятностей нагрузки и двух ее производных в совпадающие моменты времени; $\psi_2(\dot{x}, \ddot{x})$ – совместная плотность распределения вероятностей первой и второй производных нагрузки в совпадающие моменты времени; $\psi_1(x, \dot{x})$ – совместная плотность распределения вероятностей нагрузки и ее производной в совпадающие моменты времени; μ_0 – среднее число «нулей» нагрузки в единицу времени.

Для определения $\psi_3(x, \dot{x}, \ddot{x})$ найдем выражение для трехмерной плотности распределения вероятностей нагрузки. Согласно [2] имеем

$$f_3(x_1, x_2, x_3, \tau_1, \tau_2) = \sum_n c_n \omega_{3n}(x_1, x_2, x_3, \tau_1, \tau_2) \quad (5)$$

$$c_n \geq 0; \quad \sum_n c_n = 1,$$

где $\omega_{3n}(x_1, x_2, x_3, \tau_1, \tau_2)$ – трехмерная плотность распределения вероятностей n-й гауссовой компоненты.

Перейдем в (5) к новым переменным

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}; \quad y = \frac{x_2 - x_1}{\tau_2}; \quad z = \frac{\frac{x_3 - x_1}{\tau_1} - \frac{x_2 - x_1}{\tau_2}}{(\tau_1 + \tau_2)};$$

Замечая, что при $\tau_1 \rightarrow 0, \tau_2 \rightarrow 0, \frac{x_1 + x_2}{2} \rightarrow x, \frac{x_2 - x_1}{\tau_2} \rightarrow \dot{x}, \frac{\frac{x_2 - x_1}{\tau_1} - \frac{x_2 - x_1}{\tau_2}}{(\tau_1 + \tau_2)} \rightarrow \ddot{x}$, выполним предельный переход, в результате получим

$$\psi_3(x, \dot{x}, \ddot{x}) = \sum_n c_n P_{3n}(x, \dot{x}, \ddot{x}), \quad (6)$$

где $P_{3n}(x, \dot{x}, \ddot{x})$ – совместная плотность распределения вероятностей n-й гауссовой компоненты и ее двух первых производных

$$P_{3n}(x, \dot{x}, \ddot{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2} \sigma_{1n} \sqrt{\gamma}} \times \exp \left\{ -\frac{1}{2\gamma_n} \left[\sigma_{2n}^2 (x - a_n)^2 + 2\sigma_{1n}^2 (x - a_n) \dot{x} + \sigma_n^2 \dot{x}^2 \right] - \frac{\ddot{x}^2}{2\sigma_{1n}^2} \right\} \quad (7)$$

Здесь $\gamma_n = \sigma_n^2 \sigma_{2n}^2 - \sigma_{1n}^4$. Найдем совместную плотность распределения вероятностей первой и второй производных нагрузки $\psi_2(\dot{x}, \ddot{x})$

$$\psi_2(\dot{x}, \ddot{x}) = \sum_n \frac{c_n}{2\pi\sigma_{1n}\sigma_{2n}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\dot{x}^2}{\sigma_{1n}^2} + \frac{\ddot{x}^2}{\sigma_{2n}^2}\right)\right]. \quad (8)$$

Совместную плотность распределения вероятностей нагрузки и первой производной $\psi_1(x, \dot{x})$

$$\psi_1(x, \dot{x}) = \sum_n \frac{c_n}{2\pi\sigma_n\sigma_{1n}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{(x-a_n)^2}{\sigma_n^2} + \frac{\dot{x}^2}{\sigma_{1n}^2}\right]\right\} \quad (9)$$

Теперь, зная совместные плотности распределения вероятностей, по формулам (2) – (4) найдем плотность распределения вероятностей максимумов и величины μ_0 и $\mu_{\max}$.

На основании (3) и (8), находим среднее число максимумов нагрузки в единицу времени

$$\mu_{\max} = \sum_n \frac{c_n \sigma_{2n}}{2\pi\sigma_{1n}} = \sum_n c_n \mu_{\max n}, \text{ где } \mu_{\max n} - \text{среднее число максимумов нагрузки в единицу}$$

времени n -й гауссовой компоненты.

По формулам (4) и (9) находим среднее число «нулей» нагрузки в единицу времени

$$\mu_0 = \sum_n c_n \lambda_n(0) \exp\left[-\frac{a_n^2}{2\sigma_n^2}\right], \text{ где } \lambda_n(0) - \text{среднее число «нулей» в единицу времени } n\text{-й га-}$$

уссовой компоненты.

По формулам (2), (6) и (7) находим плотность распределения вероятностей максимумов нагрузки

$$\varphi(x) = \frac{1}{S_n} \sum_n \frac{c_n}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} \left\{ \frac{\sqrt{\gamma}}{\sigma_n\sigma_{2n}} \exp\left[-\frac{\sigma_{2n}^2}{2\gamma_n}(x-a_n)^2\right] + \frac{\sigma_{1n}^2\sqrt{2\pi}}{\sigma_n^2\sigma_{2n}^2}(x-a_n) \exp\left[-\frac{(x-a_n)^2}{2\sigma_n^2}\right] \Phi\left(\frac{\sigma_{1n}^2}{\sigma_n\sqrt{\gamma_n}}(x-a_n)\right) \right\}$$

где $\Phi(t)$ – интеграл вероятности; $\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^t e^{-\frac{x^2}{2}} dx$; $S_n = \sum_n c_n \mu_{\max n}$.

Литература

1. Дороднов, А.А. О полноте систем гауссовых функций и полигауссовых приближениях в радиотехнике / А.А. Дороднов, Ш.М. Чабдаров // Радиотехника. – 1995. – Т.30. – № 7. – С. 1-7.
2. Левин, Б.Р. Теоретические основы статистической радиотехники / Б.Р. Левин. – М.: Советское радио, 1986. – 728 с.

М.Ш. Магдеев, Ш.Н. Магдеев

Муромский институт (филиал) Владимирского государственного университета

602264, г. Муром, ул. Орловская, д. 23

e-mail: uo@mivlgu.ru

Планеты, Луна и погода

Погоду на Земле определяет Солнце. Без солнечного излучения Земля была бы покрыта слоем сжиженных газов атмосферы. При вращении Земли по орбите вокруг Солнца из-за наклона оси Земли к плоскости орбиты в средних и северных широтах наблюдаются времена года весна, лето, осень и зима. Но иногда весной бывают заморозки, а зимой — оттепели. Эти явления в основном объясняются вспышками на Солнце. Когда вспышка на центральном меридиане Солнца, то поток солнечной плазмы из протонов и электронов через 2-3 суток достигает Земли и часть плазмы прорывается в нижние слои атмосферы в районах магнитных полюсов Земли. Под действием магнитного поля Земли в северном полушарии протоны закручиваются против часовой стрелки, а электроны по часовой. Протоны взаимодействуют с атомами кислорода атмосферы и образуют молекулы воды, которые в гравитационном поле Земли опускаются в тропосферу и возникают циклоны, которые движутся из Атлантического океана на восток. Это и вызывает зимние оттепели.

Весенние заморозки также можно объяснить космическими причинами. В оптике есть понятие зоны Френеля. При шарообразном источнике излучения основная энергия в данную точку попадает из центральной зоны.

Так как энергия Солнца идет из его центра, то перекрытие центральной зоны Меркурием или Венерой, а чаще Луной, может привести к снижению температуры на Земле. Но так как у Луны и Меркурия плоскость орбиты меняется по отношению к плоскости орбиты Земли, то они не всегда перекрывают центральную зону Френеля на Солнце, поэтому при прогнозировании погоды необходимо учитывать положение Луны и Меркурия относительно Солнца.

Перед и после новолуния могут быть небольшие осадки, которые объясняются так называемыми облаками Кордылевского, открытыми в 1980-х годах. Они состоят из космической пыли и движутся перед и после Луны. Под действием давления солнечного излучения частицы космической пыли влетают в атмосферу Земли и становятся центрами конденсации молекул воды, что и обуславливает осадки перед и после новолуния.

Таким образом, аномалии погоды на Земле можно объяснить и космическими причинами.

Е.Н. Мошнина

*Муромский институт (филиал) Владимирского государственного университета
602264, г. Муром, ул. Орловская, д. 23
e-mail: uo@mivlgu.ru*

Об исследовании сходимости числовых рядов

Одним из наиболее сложных в изучении курса математики является раздел «Теория рядов». Несмотря на то, что материал изучается студентами инженерных специальностей в третьем семестре, когда успешно прошла их адаптация в вузе и накоплены необходимые знания по математическому анализу, этот раздел является наиболее проблемным в изучении. К подобным выводам приводит и анализ результатов Internet-экзаменов. По-видимому, сказывается специфика объекта исследования: бесконечное количество членов ряда, возможность выполнения линейных арифметических операций не для всех рядов, наличие большого количества признаков сходимости и особенности их применения. Математики и сами с большими трудностями научились свободно и легко обращаться с бесконечными суммами. Актуальность же изучения проблемы обусловлена тем, что этот раздел математики позволяет решить любую практическую задачу, поставленную корректно, с разумной степенью точности, достаточной для практического использования.

Изучение раздела начинается с анализа числовых рядов – выражения вида

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad (*)$$

в котором числа $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ – члены ряда не произвольны, их закон построения определен формулой общего члена ряда $a_n = f(n)$. Очень важным является наличие многоточия, поставленного в конце выражения, которое показывает, что количество чисел, участвующих в определении ряда всегда бесконечно, то есть ряд – это сумма бесконечного числа слагаемых.

Главный вопрос в теории рядов это вопрос о сходимости ряда, то есть вопрос о том имеет ли определенное числовое значение бесконечная сумма (*). Только тогда можно произвольно менять порядок членов в ряде, добавлять или отбрасывать конечное число членов, а также производить с этими рядами действия сложения, вычитания, умножения, деления и возведения в степень так, как если бы это были обычные суммы (многочлены).

Трудности у студентов обычно возникают при применении необходимого признака сходимости ряда, поскольку он является следствием сходимости, и из его выполнения следует только возможность сходимости ряда. Необходимо обратить внимание на следствие, которое однозначно решает вопрос о расхождении ряда.

Для дальнейшего исследования требуется применение достаточного признака – если он выполнен, то ряд сходится, не выполнен – расходится. Но признаков много, какой из них выбрать для заданного ряда? Следует обратить внимание студентов на область применения каждого из них. Например, для знакоположительного ряда признак Даламбера применяют, если в формуле общего члена ряда имеются произведения или факториалы, а признак Коши – если удобно извлекать корень n -ой степени из общего члена ряда, интегральный признак, если есть возможность проинтегрировать функцию, построенную для ряда. Применение теорем сравнения требует подбора подходящего (мажорантного) ряда, что зависит и от проницательности исследователя, поэтому необходимо обратить внимание на эталонные ряды и пояснить принципы выбора рядов для сравнения. Следует подчеркнуть, что расходимость ряда, для которого выполнен необходимый признак, невозможно определить по признакам Даламбера и Коши (вычисляемые в них пределы будут единичными), и надо применять другие признаки, поэтому большое разнообразие признаков сходимости – достоинство теории, а не ее недостаток.

Особое внимание следует уделить знакопеременным рядам. Несмотря на то, что определение сходимости знакопеременного ряда возможно только по одному признаку Лейбница, знакопеременные ряды могут быть сходящимися абсолютно и сходящимися условно. Разница их эффектно проявляется в свойствах: для абсолютно сходящегося ряда возможны любые перестановки его членов без изменения суммы ряда. Переставляя местами члены условно сходяще-

гося ряда можно изменять первоначальную величину суммы ряда, в частности можно получить расходящийся ряд. Нужны предосторожности в действиях с такими рядами, например, умножение условно сходящихся рядов следует производить в строго определенном порядке. Студентам обычно бывает трудно работать с абстракциями, которыми сильна математика, но, приведение конкретного примера «непозволительных» действий, в результате которых получится абсурдный результат типа $0 = 1$ – «символ создания мира из ничего», позволяет не только проиллюстрировать сказанное, но и заинтересовать изучением курса.

Необходимо подчеркнуть, что точное значение суммы ряда вычисляют через предел последовательности частичных сумм ряда, что весьма трудоемко, поэтому важно уметь оценить ее приближенно. Обычно, в качестве оценки суммы ряда берут его n -ую частичную сумму – сумму n первых членов ряда. Ошибку такого приближения можно оценить. Для знакоположительного ряда поможет мажорантный эталонный ряд, сумму которого можно легко найти точно, для знакопеременного – применяют признак Лейбница, по которому, ошибка не превосходит первого из отброшенных членов ряда.

Ю.С. Пиньковецкая

Ульяновский государственный университет

г. Ульяновск, ул. Пушкинская, д. 4а

e-mail: judy54@yandex.ru

Моделирование распределения малых предприятий в зависимости от численности работников

В настоящее время развитие экономики регионов Российской Федерации должно основываться на наращивании сектора малого предпринимательства. Подготовка научных обоснований в этой сфере непосредственно связана с разработкой математических моделей, отражающих закономерности и тенденции становления малого бизнеса. Построение таких моделей может основываться на исследовании размерностных особенностей малых предприятий. При этом в качестве основной характеристики выступает численность работников предприятий.

В процессе исследований, во-первых, была определена зависимость доли малых предприятий различной численности в общем количестве малых предприятий от численности работников этих предприятий [1]. В качестве исходных данных при проведении исследований использовались статистические данные о количестве малых предприятий и численности их работников по ряду регионов Российской Федерации.

Регрессионный и корреляционный анализ [2] проводился с использованием метода наименьших квадратов. Построение разных типов уравнений регрессии проводилось с использованием пакета прикладных программ «Microsoft Excel».

Сравнение полученных уравнений показало, что в наиболее полной мере аппроксимирует исходные данные на всем диапазоне, рассматриваемых значений, следующая функция:

$$y(x) = \begin{cases} -0,0027 + \frac{0,26}{x - 0,04}, & \text{если } 1 \leq x \leq 100, \\ 0, & \text{если } x < 1 \end{cases} \quad (1)$$

где $y(x)$ – доля малых предприятий, x – средняя численность работников одного малого предприятия, чел.

Проверка качества полученной регрессионной модели показала, что коэффициенты и уравнение регрессии статистически значимы. Анализируя содержательную сущность, полученной зависимости отметим, что с увеличением численности работников малого предприятия доля (частота) появления малых предприятий в зависимости от численности работников, занятых на этих предприятиях, монотонно убывает. Количество предприятий с малой численностью работников значительно больше предприятий с относительно большей численностью работников. При приближении значения численности работников, занятых на малом предприятии, к максимальной величине (сто человек), соответствующая доля (частота) стремится к нулю, оставаясь при этом положительной (горизонтальная асимптота – ось абсцисс). Поскольку все малые предприятия априори имеют численность работников от одного до ста человек площадь фигуры, ограниченная функцией (1), горизонтальной асимптотой и вертикальными прямыми $x_{\min} = 1$, $x_{\max} = 100$, равна единице.

Во-вторых, было установлено существование зависимости между удельным весом работников, занятых на малых предприятиях, и численностью работников этих предприятий. Исходные данные и методика решения аналогичны рассмотренной выше зависимости.

На основе сравнения полученных моделей наилучшим образом аппроксимирует исходные статистические данные следующая функция регрессии [3]:

$$y(x) = \begin{cases} 3,42 \cdot e^{(-0,03) \cdot x}, & \text{если } 1 \leq x \leq 100 \\ 0, & \text{если } x < 1, \end{cases} \quad (2)$$

где $y(x)$ – удельный вес работников, работающих в малых предприятиях соответствующей численности, %; x – средняя численность работников одного малого предприятия, чел.

С увеличением размера предприятий общая численность работающих на них монотонно снижается, но не так резко, как в предыдущей модели.

На основании полученных зависимостей предложен авторский подход уточнения существующего [4] понятийно-категориального аппарата, описывающего малые предприятия. Автором предлагается следующая классификация малых предприятий:

- нанопредприятия с численностью работников от 1 до 5 человек включительно, при чем удельный вес в общем количестве малых предприятий составляет 43,3 %;
- микропредприятия с численностью 5 до 15 человек включительно, причем удельный вес в общем количестве малых предприятий составляет 27 %;
- минипредприятия с численностью от 15 до 100 человек, при чем удельный вес в общем количестве малых предприятий составляет 29,7 %.

Уточненный категориальный аппарат должен позволить учесть специфику деятельности различных по размеру малых предприятий при разработке институциональных основ малого бизнеса, решении проблем их развития, совершенствования функционирования и обеспечения эффективных экономических инструментов на всех уровнях управления:

- федерального, в части снижения требований и упрощения правил игры, совершенствования законодательства, информационного обеспечения и создания соответствующих институтов;
- регионального и муниципального, то есть создание системы реальной поддержки малых предприятий, упрощения их взаимодействия с органами власти, в том числе в получении заказов на продукцию;
- непосредственно самих малых предприятий, за счет внедрения оптимальных методов, моделей и инструментов управления и экономического анализа производственной деятельности.

Особенностью нанопредприятий является отсутствие в них подразделений и специалистов по основным направлениям управленческой деятельности. Поскольку очень маленьких предприятий до пяти человек, достаточно много, целесообразно создание технопарков, бизнес-инкубаторов, инновационных центров и т. д. Тогда значительную часть функций по обеспечению деятельности малых предприятий эти структуры берут на себя. В частности, работы по бухгалтерскому обслуживанию, учету кадров, аренде офисных помещений, обеспечению охраны, пожарной безопасности и т. д.

В связи с преобладанием нанопредприятий существует необходимость в изменении законодательства в сфере малых предприятий (приближающегося к индивидуальным предпринимателям) и разработке новых институциональных аспектов, касающихся налогообложения, поддержки малого бизнеса, формирования информационных баз и развития программных комплексов обеспечивающих деятельность малых предприятий.

Полученные результаты представляются важными для решения задач развития малых предприятий в практическом плане и проведения дальнейших теоретических и прикладных исследований. Учет указанных закономерностей необходим для правильного выбора наиболее эффективных методов и инструментов совершенствования деятельности малых предприятий и разработки программ развития малого бизнеса на федеральном и региональном уровнях.

Литература

1. Пиньковецкая, Ю.С. Некоторые аспекты повышения эффективности управления деятельностью малых предприятий / Ю.С. Пиньковецкая // Проблемы современной экономики.– 2009.– № 3 (31).– С. 197-199.
2. Айвазян, С.А. Прикладная статистика: исследование зависимостей / С.А. Айвазян, И.С. Енюков, Л.Д. Мешалкин.– М.: Финансы и статистика, 1985.– 487 с.
3. Пиньковецкая, Ю.С. Численность предприятий малого бизнеса в Российской Федерации: результаты анализа / Ю.С. Пиньковецкая // Экономика региона.– 2009.– № 2 (18).– С. 224-230.
4. О развитии малого и среднего предпринимательства в Российской Федерации. Федеральный закон РФ от 24 июля 2007 года. № 209-ФЗ.

Т.Н. Попова

Муромский институт (филиал) Владимирского государственного университета
602264, г. Муром, ул. Орловская, д. 23
e-mail: uo@mivlgu.ru

Введение в матричную алгебру

Студенты всех специальностей университета на первом курсе знакомятся с новым математическим понятием «матрица». Матричные вычисления широко используются в математике и ее приложениях. Матрицы являются основным математическим аппаратом линейной алгебры, используются в математическом анализе при интегрировании систем дифференциальных уравнений, в теории вероятностей.

Опыт преподавания показывает, что изучение матричной алгебры эффективнее начинать не с определения матрицы, а с приведения конкретного примера. Лектор предполагает, что три предприятия выпускают пять различных видов продукции. Отчет о производстве предприятий за определенный период времени может быть дан в виде таблицы:

Таблица 1

Отчет о производстве предприятий

	Количество продукции вида				
	1	2	3	4	5
Предприятие № 1	2	3	5	2	8
Предприятие № 2	6	4	3	5	7
Предприятие № 3	3	1	4	6	2

Для студентов смысл данной таблицы очевиден: предприятие № 1 выпускает продукцию вида 3 в количестве пяти единиц, то есть достаточно взять пересечение первой строки и третьего столбца таблицы. Далее студентам предлагается записать ту же таблицу только из чисел, отбросив названия строк и столбцов, и обозначить ее буквой A :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 2 & 8 \\ 6 & 4 & 3 & 5 & 7 \\ 3 & 1 & 4 & 6 & 2 \end{pmatrix}.$$

Данная таблица является прямоугольной матрицей, состоящей из трех строк и пяти столбцов. Затем преподаватель дает необходимые определения, и матрица записывается в общем виде. Сложение матриц и умножение матрицы на число обычно не вызывает особых трудностей для понимания. Приведение конкретных примеров зависит от уровня математической подготовки студентов. Например, если матрица A – отчет о производстве предприятий за один год, то за матрицу B можно обозначить отчет о производстве продукции за второй год. Матрица B будет иметь тот же размер, если ассортимент продукции не изменился. Выпуск продукции за два года выражается матрицей $A + B$, то есть складываются соответствующие элементы этих матриц. Если в течение второго периода производство каждого вида продукции на всех предприятиях увеличилось на 20 %, то матрица $B = 1,2 \cdot A$. В этом случае для получения матрицы B каждый элемент матрицы A надо умножить на данное число.

Операция умножения матриц вызывает наибольшие затруднения у студентов, поэтому сначала можно разобрать пример. Предположим, что фирма выпускает три вида продукции в определенном количестве, что можно изобразить матрицей-строкой. Себестоимость единицы продукции записывается в виде матрицы-столбца. На вопрос: «Как вычислить общие затраты на производство всей продукции?» студенты отвечают без особых затруднений. Далее дается определение произведения матриц, процесс умножения можно проиллюстрировать на схеме.

Данная методика позволяет студентам легко овладеть новыми понятиями, освоить действия над матрицами и обширные приложения теории матриц.

И.В. Стерликова

Муромский институт (филиал) Владимирского государственного университета
602264, г. Муром, ул. Орловская, д. 23
e-mail: uo@mivlgu.ru

Математическое моделирование записей геомагнитных пульсаций Pi2

Геомагнитные пульсации Pi2 – естественные колебания магнитного поля Земли с периодом 40-150 с, связанные с корпускулярным излучением Солнца, обусловленным выбросом заряженных частиц вследствие термоядерного взрыва в недрах планеты. Самописцы наземных обсерваторий регистрируют Pi2 как изолированный волновой пакет квазисинусоидального характера (амплитуда колебаний нарастает от нуля до максимума и снова убывает до нуля). Такой характер развития Pi2 является их основной чертой, позволяющей отличить Pi2 от других типов геомагнитных пульсаций. По своей физической природе Pi2 – магнитогидродинамические волны в магнитосфере, преобразующиеся в электромагнитные волны, регистрируемые на Земле. Геомагнитные пульсации Pi2 тесно связаны с магнитными бурями, служат предвестниками природных катаклизмов, одними из которых являются землетрясения. Поэтому актуальность исследования свойств Pi2 не вызывает сомнения.

Цель работы – математическое моделирование сигнала Pi2, которое позволит автоматизировать процесс обработки записей пульсаций. В качестве аналога выберем моделирование сейсмических сигналов [1], получившее название СВАН.

СВАН – спектрально – временной анализ, заключающийся в линейной фильтрации сигнала набором узкополосных частотных фильтров. Амплитуда и фаза отфильтрованного сигнала представляется в виде функции двух переменных – центральной частоты фильтра и времени. Для фильтрации входного сигнала используется двойное преобразование Фурье (по времени и частоте)

$$Y(t, \omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left[\int_0^{\tau} e^{-i\lambda t} u(t) dt \right] G(i\lambda) \exp \left[-\alpha \frac{(\lambda - \omega)^2}{\omega^2} \right] e^{i\lambda t} d\lambda, \quad (1)$$

где $X(t, \omega)$ – функция времени и частоты; t – время, $t = 0 - \tau$ – временной интервал; ω – центральная частота фильтра; λ – частота колебаний; $u(t)$ – компонента пульсаций; $G(i, \lambda)$ – комплексная частотная характеристика регистрирующей аппаратуры; α – параметр, характеризующий полосу пропускания фильтра, выбран $\alpha = 5$, число фильтров $N = 30$, исходя из модельных расчетов.

На рисунке приведен фрагмент СВАН пульсаций Pi2, зарегистрированных на обсерватории Белое озеро (Фр~550, лг~111°) 18.10.74 в интервале времени 21 ч 59 мин 36 с – 22 ч 00 мин 53 с UT. По горизонтали отложены центральные периоды фильтров с шагом 2 с. По вертикали отложено время регистрации сигнала с шагом $\Delta t = 6,4$ с.

СВАН дает трехмерное представление информации. На амплитудном спектре в качестве третьего измерения в условных единицах представлены амплитуды спектральных составляющих Pi2. Цифре 1000 соответствует максимальная амплитуда, ее можно перевести в единицы измерения напряженности магнитного поля Земли. На уровне 0,6 от максимума проведены границы волнового пакета («тела» пульсаций), контуры которого получаются в результате вычерчивания линии равной интенсивности сигнала, соответствующей данному уровню. Амплитудный СВАН позволяет установить предварительное время регистрации максимума волнового пакета и указать предварительный период колебания Pi2, соответствующий максимуму интенсивности. В данном примере $t = 22$ ч 00 мин 20 с, $T = 36$ с, соответствующие числу 1000. Уточнение информации может быть получено с помощью фазового спектра.

Фазовый СВАН представлен в трехмерном измерении: два измерения периоды и время, третье измерение представлено в виде цифр, соответствующих реальному значению фазы сигнала в градусах. Фазы СВАН выдаются на печать в интервале 0-3600. Отмечается относительная стационарность фазы $\varphi = 294^\circ - 296^\circ$ в различных фильтрах в пределах границ волнового пакета в момент времени, соответствующий амплитудному максимуму волнового пакета в 22 ч 00 мин 20 с и $\varphi = 229^\circ - 232^\circ$ в 22 ч 00 мин 14 с. В то как смещение по времени на шаг

выдачи информации вверх и вниз от указанных моментов времени приводит к существенному различию фазы в близ лежащих фильтрах (свыше 5°), что согласуется с [2]. Стационарность фазы позволяет уточнить с точностью до шага СВАН по времени ($\Delta t = 6,4\text{с}$) момент времени наступления максимума волнового пакета (групповое время пакета). В данном примере максимум волнового пакета приходится на 22 ч 00 мин 14с – 22 ч 00 мин 20 с.

Согласно математической модели СВАН, на печать выдаются значения фазы, соответствующие центральному периоду каждого из N фильтров. Как известно, фаза колебания с течением времени линейно нарастает по закону $\varphi = \omega t = \frac{2\pi}{T}$. Поэтому в каждом фильтре с центральным периодом $T = \text{const}$ за время, равное шагу СВАН $\Delta t = 6,4\text{с}$, должно наблюдаться так называемое номинальное приращение фазы

$$\Delta\varphi = \omega\Delta t = \frac{2\pi}{T} \Delta t = \frac{360^\circ}{T} \cdot \Delta t \text{ [град]}. \quad (2)$$

Реальные приращения фаз в фильтрах могут отличаться от номинальных из-за сравнительно широкого окна фильтрации гауссовых фильтров ($b = 5$), выбранных для получения гладких тел волновых пакетов на амплитудных спектрах.

Сравним номинальные приращения фазы, рассчитанные по формуле (2) для каждого фильтра с центральным периодом T , с реальными приращениями фазы, рассчитанными с помощью модели СВАН. Если приращения совпадут, то их разность окажется равной нулю

$$\Delta\varphi_p - \Delta\varphi_n = 0 \quad (3)$$

Как видно из рисунка реальные приращения совпали с номинальными для $T = 37\text{с}$ в 22 ч 00 мин 14 с и для $T = 36\text{с}$ в 22 ч 00 мин 20 с и позже, в то время как на амплитудном спектре максимум амплитуды приходится на $T = 36\text{с}$.

Нулевое отклонение реального приращения фазы с течением времени от номинального является основным признаком, уточняющим период спектральной компоненты, соответствующей максимальной интенсивности волнового пакета, что позволяет уточнить центр «тела» волнового пакета, и принципиально важно при исследовании вопроса о дисперсии сигнала.

Литература

1. Грудева, Н.П. Спектрально-временной анализ сейсмических волн / Н.П. Грудева, А.Л. Левшин, В.Ф. Писаренко и др. // Теоретическая и вычислительная геофизика. Вып. 1.– М. 1974.– С. 3.
2. Четаев, Д.Н. Дирекционный анализ магнитотеллурических наблюдений / Д.Н. Четаев.– М.: ИФЗ АН СССР, 1985.– 227 с.

К вопросу течения anomalно вязкой среды во вращающемся овальном канале «Конфузор-диффузор»

Вопросам исследования течения вязкой (ньютоновской) жидкости во вращающихся круглых каналах посвящено значительное число работ. Однако в настоящее время в литературе отсутствуют работы, касающиеся исследования процесса течения anomalно – вязкой жидкости во вращающихся вокруг своей оси каналах типа «конфузор-диффузор» овального сечения, позволяющих обеспечивать интенсивные процессы теплообмена (рис.1) [1].

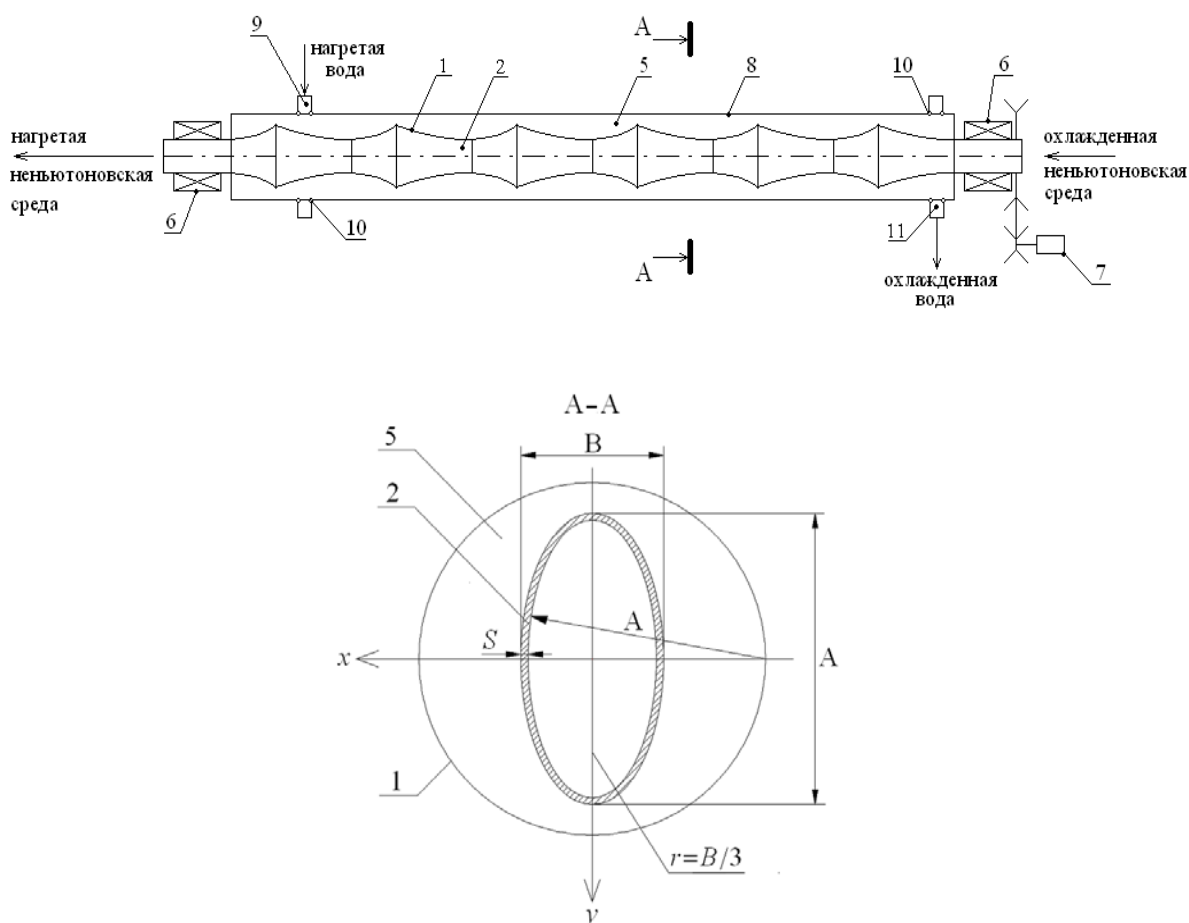


Рис.1. Аппарат для проведения процесса теплообмена с овальным конфузорно-диффузорным каналом

В качестве модельной среды нами рассмотрены водные растворы карбоксиметилцеллюлозы (КМЦ), кривые течения которых хорошо описываются в широком диапазоне изменения температур «степенным» законом Освальда – де Вилля $\varphi = k\tau^n$. Реологические константы и теплофизические характеристики КМЦ представлены в таблице [2,3].

Структура потока при течении anomalно – вязкой среды в круглой трубе, вращающейся вокруг своей оси, имеет ряд специфических особенностей. После входа среды во вращающуюся трубу стенки сообщают закрутку только периферийным частицам среды, но в связи с высокой консистенцией вращательное движение быстро распространяется на частицы, расположенные ближе к оси, и на незначительном удалении от входа весь поток вращается вместе с трубой по закону твердого тела.

Кон На- КМЦ. % масс.	T, К	n	к	Ср, Дж/кг К	л,Вт/м К	a·10 ⁷ , мІ/с
4	293	4,660	4,42	4082,13	0,461	1,115
	313	0,510	2,63	4090,08	0,511	1,242
	333	5,540	1,77	4081,76	0,522	1,276
	353	0,601	1,19	4111,44	0,415	1,017
8	293	0,344	3,244	3916,33	0,456	1,086
	313	0,364	2,829	3935,59	0,493	1,180
	333	0,384	2,379	3945,22	0,474	1,149
	353	0,404	1,423	3969,51	0,336	0,820
11	293	0,335	8,316	3840,27	0,486	1,134
	313	0,354	5,374	3858,55	0,527	1,232
	333	0,374	5,291	3874,05	0,515	1,209
	353	0,394	5,009	3900,84	0,378	0,892
15	293	0,325	38,367	3775,24	0,496	1,134
	313	0,344	26,971	3784,87	0,531	1,232
	333	0,364	17,118	3792,82	0,539	1,209
	353	0,384	14,854	3814,59	0,380	0,892
25	293	0,213	96,352	3709,09	0,505	1,085
	313	0,231	46,719	3722,07	0,544	1,175
	333	0,268	40,81	3735,46	0,522	1,134
	353	0,287	27,226	3776,49	0,368	0,800

В этом случае циркуляция жидкости в поперечном сечении круглой трубы «подавляется», а процесс теплообмена от стенки к жидкости и далее в ядро потока осуществляется в основном теплопроводностью.

В связи с этим нами для интенсификации теплообмена в канале предложено проточную часть конфузотно-диффузотной трубы выполнить в форме овала (рис.1) – [1], что при вращении создает градиент центробежного давления на осях овала, поддерживая вихревую структуру течения и интенсифицируя теплообмен. Последующая разработка математической модели сопряженного теплообмена во вращающемся конфузотно-диффузотном канале овального сечения и ее численная реализация позволит определить значения параметров скоростей и давлений в проточной части канала и наметить основные направления в разработке инженерных методов расчета теплообменного оборудования для нагрева неньютоновских сред.

Литература

1. Патент № 90887 МПК F28D 7/00, 11/00. Аппарат для проведения процессов теплообмена / А.Я. Золотоносот. – № 2009136145/22; опубл. 20.10.10. Бюл. № 2.
2. Бахаева, Т.Н. Экспериментальные исследования температуропроводности водных растворов карбоксиметилцеллюлозы / Т.Н. Бахаева, А.Я. Золотоносот // Известия вузов. Проблемы энергетики. – 2008. – № 3-4. – С.131-133.
3. Бахаева, Т.Н. Экспериментальные исследования реологических свойств карбоксиметилцеллюлозы методом ротационной вискозиметрии / Т.Н. Бахаева, Я.Д. Золотоносот, А.Я. Золотоносот // Известия вузов. Проблемы энергетики. – 2006. – № 7-8. – С.111-114.

Е.К. Хусайнова

*Орский гуманитарно-технологический институт (филиал) Орского государственного университета
г. Орск, пр. Мира, д. 15 а
e-mail: husainova-elena@mail.ru*

Применение чисел Фибоначчи в анализе фондовых бирж

Последовательность Фибоначчи была хорошо известна в Древнем мире. На Западе она была исследована Леонардо Пизанским, известным как Фибоначчи, в его труде «Liber Abaci». Последовательность Фибоначчи имеет вид: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144,... Ряд возникает, когда, начиная с 1, 1, следующее число получается сложением двух предыдущих. Последовательность асимптотически стремится к некоторому постоянному иррациональному соотношению. Если какой-либо член последовательности Фибоначчи разделить на предшествующий ему, результатом будет величина, колеблющаяся около иррационального значения $1,61803398875...$ и через раз то превосходящая, то не достигающая его. Существуют различные названия соотношения: Божественная пропорция, золотое сечение, золотое среднее и отношение вертящихся квадратов. В алгебре общепринято его обозначение греческой буквой «фи».

Перед нами была поставлена цель: изучить практическое значение чисел Фибоначчи.

Актуальность заключается в следующем. В прессе, Интернете, на телевидении часто можно встретить различные рекламные слоганы, например: «Форекс для начинающих», «Форекс: стратегии, секреты, успех». Но большинство не понимает, что из себя представляет биржа, а тем более, как на ней можно заработать деньги. Поэтому интересно рассмотреть роль чисел Фибоначчи в анализе бирж.

Эдуард Люка, благодаря которому название «числа Фибоначчи» стало общеупотребительным, активно занимался ими во 2-ой половине XIX века. Одно из его удивительных достижений состояло в использовании свойств чисел Фибоначчи для доказательства того, что 39-значное число Мерсенна $2^{127}-1$ является простым. Матиясевич с использованием чисел Фибоначчи решил 10-ю проблему Гильберта. В США создается даже Математическая Фибоначчи-ассоциация, которая с 1963 г. выпускает специальный журнал. В 1997 г. пару необычных закономерностей ряда указал исследователь Владимир Михайлов. Он указал, что природа формируется по законам, какие заложены в этой числовой последовательности.

Исследуемый ряд применяется в математике, экономике, техническом анализе и финансах, ботанике, зоологии, физиологии, медицине, а также философии, эстетике, архитектуре, рекламе, киноиндустрии, живописи и т. д. В природе расстояния между листьями/ветками на стволе растения относятся примерно как числа Фибоначчи. Черенки листьев примыкают к стеблю по спирали, которая проходит между двумя соседними листьями: $1/3$ полного оборота – у орешника, $2/5$ – у дуба, $3/8$ – у тополя и груши, $5/13$ – у ивы. Чешуйки на еловой шишке, семечки цветка подсолнуха представляют собой золотую спираль. В интерьерном и ландшафтном дизайне ряд используется для вычисления гармоничных пропорций: соотношение высоты помещения к высоте декорирования стен различными материалами. Сергей Эйзенштейн искусственно построил фильм «Броненосец Потёмкин» по правилам золотого сечения. Он разбил ленту на пять частей. В первых трёх действие разворачивается на корабле, в двух последних происходит восстание в Одессе. Этот переход в город осуществляется точно в точке золотого сечения. Режиссёр считал, что, такой переход воспринимается как наиболее закономерный и естественный. Человек подсознательно ищет Божественную пропорцию: она нужна для удовлетворения его потребности в комфорте.

Один из самых простых способов применения чисел Фибоначчи на практике в техническом анализе — определение отрезков времени, через которое произойдет то или иное событие, например, изменение тренда. Аналитиком отсчитываются определенное количество «фибоначчиевых» дней или недель (13, 21, 34, 55 и т. д.) от предыдущего исходного события. Данный метод не всегда точен в связи со своей простотой, но может быть удобен для подстраховки в сочетании с более сложными методами.

Числа Фибоначчи имеют широкое применение при определении длительности периода в теории циклов. За основу каждого доминантного цикла берется определенное количество дней, недель, месяцев, связанное с числами Фибоначчи. Например, длина цикла (волны) Кондратьева равна 54 годам. Легко заметить близость этой величины к числу Фибоначчи 55.

На рынке Forex числа Фибоначчи применяются разным образом, в частности, они являются инструментом прогнозирования цели цены и расчета эффективного уровня закрытия убыточной позиции (stop-loss). Например, коррекция тренда, согласно числу 0,618, предвидится, как правило, на уровне 61,8 % от предшествующего изменения цены, что дает возможность вкладчику разместить приказ о закрытии сделки, предполагающий защиту от снижения цены ниже указанной. Благодаря этому, если коррекция свершится на уровне, перекрывающем прогнозируемый, трейдер избежит избыточных потерь. С другой стороны, если коррекция достигнет приблизительно уровня цели, полученный итог увеличит вероятность того, что выбранная вкладчиком трактовка перемещения цены является правильной. Отдельные числа из последовательности можно увидеть в движениях цен на товары. Колебания соотношений около значения 1,618 на большую или меньшую величину есть в волновой теории Эллиотта, где они описываются Правилем чередования. Числа Фибоначчи – математическая основа данной теории.

Сегодня существует множество торгово-аналитических платформ, которые дают возможность построить фибо-уровни без предварительных расчетов. В сети огромное количество инструментов, основанных на числах Фибоначчи, что упрощает использование уровней Фибоначчи. Их применение дает возможность качественно определить уровни поддержки и сопротивления. Именно по причине таких широких возможностей для анализа, торговля по Фибоначчи пользуется успехом у трейдеров. Уровни Фибоначчи – мощное оружие в руках инвесторов.

Методика прогностических расчетов с использованием чисел Фибоначчи строится на том, что численное соотношение движения и отката должно давать коэффициенты золотого сечения, то есть при движении 1,618; 2,618; 4,236, при откате 0,618; 0,382; 0,236. Эти численные значения и представляют собой те важные уровни, которые рынок «вспоминает» по ходу изменения цен. Именно на них ориентируется трейдер в своей работе. Наиболее простое употребление числа Фибоначчи находят при расчете уровня отката или отскока. Так как цены не могут непрерывно расти или падать, после каждого их изменения существует откат той или иной величины в противоположную сторону. Фибо-уровни используются в большинстве своем для определения коррекции, то есть противоположного действующей тенденции движения. Наиболее вероятные откаты будут от уровня 38,2 %; 50,0 %; 61,8 %. Это сильные уровни и цена от них часто отталкивается. Особенно четко это явление видно после сильного и продолжительного движения. Уровни являются идеальными ориентирами для оценки зон, в которых возможно либо торможение цены, либо отбой. Фибо-уровни помогают предполагать, где может закончиться коррекционное движение.

Чтобы построить уровни Фибоначчи, нужно найти отправные точки: верхнюю и нижнюю. Чтобы построить эти элементы нужно использовать алгоритм расчета на двух базовых уровнях. Данные уровни устанавливаются пользователем в двух точках экстремумов. Они являются уровнями Фибоначчи.

Коррекционные фибо-уровни подразделяются на две большие группы. Уровни, относящиеся к 1-ой группе, находятся в диапазоне между двумя точками, которые будут заданы для конкретного графика. Это и есть значения, которые называются уровнями коррекции. Они располагаются по возрастанию расчетных коэффициентов от второго значения к первому. Такая особенность обусловлена необходимостью построения таким образом, чтобы рассматривать коррекцию от хода цены из первого значения ко второму. Уровни, относящиеся ко 2-ой группе, построены в продолжение движения ценового диапазона от первой точки ко второй. Это и есть уровни расширения Фибоначчи.

Для того чтобы данный метод Фибоначчи был продуктивен, следует научиться правильно использовать все Фибоначчи-инструменты. В частности, для правильного построения уровней, необходимо определить, где начало и конец тренда. Самыми значимыми из основанных на числах Фибоначчи инструментах считаются Fibonacci Arcs и Fibonacci Fans, которые строят линии поддержки и сопротивления, основываясь на числовой последовательности и процентным соотношениям Фибоначчи.

Практическая значимость работы заключается в доступном объяснении применения фибо-инструментов в анализе тренда. Трейдеры всего мира обладают достаточно простым, но эффективным средством для создания прогнозов и, как следствие, зарабатывания денег. Поэтому обучающим трейдеров компаниям следует уделять внимание фибо-инструментам. Огромная часть биржевых игроков использует числа Фибоначчи, вследствие чего рынок и двигается, основываясь на этих числах, ведь массы способны управлять рынком.

Р.А. Штыков

Муромский институт (филиал) Владимирского государственного университета
602264, г. Муром, ул. Орловская, д. 23
e-mail: ipmrroman@ya.ru

Разработка модели гидравлической сети для определения квадратичного закона гидравлического сопротивления

Рассмотрим схему с установившимся движением жидкости, состоящую из u участков, z узлов и k линейно независимых контуров $k = u - z + 1$.

Разработку линейно независимых циклов для выполнения расчета потокораспределения в гидравлических сетях можно осуществить при помощи основного дерева графа гидравлической системы для определения матриц соединений и матриц контуров. Построение основного дерева выполняется с помощью алгоритма Краскала.

На схеме выделяется некоторое дерево, связывающее все её z узлы. В результате все участки разобьются на $(z - 1)$ участков дерева и k участков, не вошедших в это дерево, которые называются хордами. Каждая хорда замыкает определенную последовательность участков дерева и однозначно определяет контур, который фиксируется соответствующей строкой матрицы контуров.

Введем полную матрицу A соединений z узлов и u ветвей сети, однозначно описывающую ее конфигурацию, безотносительно к конкретным длинам ветвей и фактическому месторасположению узлов. В этой матрице на пересечении строки j , соответствующей узлу j и столбца i , соответствующего ветви i , помещается элемент a_{ij} . Этот элемент принимает следующие значения: $a_{ij} = 0$ – если ветвь i не соединена с узлом j , $a_{ij} = -1$ – если ветвь i исходит из узла j , $a_{ij} = 1$ – если узел j является для ветви i конечным. Таким образом, в каждом столбце матрицы A только два не нулевых элемента, это 1 и -1, поэтому сумма всех ее строк дает нулевую строку, что означает их линейную зависимость. Поэтому ранг матрицы, то есть максимальное число ее линейно независимых строк или столбцов составит $z - 1$. Для расчетов будем использовать усеченную матрицу соединений с размерами $(z - 1) \cdot u$, имеющую только линейно независимые строки, ее обозначим $\bar{A}$. Она получается из матрицы A вычеркиванием любой из строк, как правило, этой строкой является строка z .

Введем полную матрицу B контуров. В матрице контуров на пересечении строки r , соответствующей контуру k и столбца i , стоит элемент b_{ri} . Этот элемент принимает следующие значения: $b_{ri} = 0$, если ветвь i не принадлежит контуру r , $b_{ri} = 1$, если ветвь i входит в контур k и ее ориентация совпадает с направлением его обхода, $b_{ri} = -1$, если ветвь i входит в контур r , но ее ориентация противоположна направлению его обхода.

Вся выше приведенная методика ориентирована на расчет квадратичного закона гидравлического сопротивления:

$$h_i + H_i = r_i x_i^2, \quad (1)$$

где x_i - неизвестный расход; r_i - сопротивление участка; h_i - напор равный разности пьезометрических отметок на концах участка (линейное падение напора); H_i - активный (действующий) напор.

Поскольку по знаку величины r_i необходимо судить о направлении потока на участке и соответственно о знаке h_i , то (1) можно записать в виде $h_i + H_i = r_i |x_i| x_i$, (2)

Р.А. Штыков

Муромский институт (филиал) Владимирского государственного университета

602264, г. Муром, ул. Орловская, д. 23

e-mail: ipmrroman@ya.ru

Однозначность в определении матрицы контуров инженерной сети

Докажем, что матрица соединений $\bar{A}$ и выбранное на схеме цепи дерево однозначно определяет матрицу контуров B , что может быть использовано для ее автоматического построения при расчетах на компьютере.

Перенумеруем переменные x_i , таким образом, чтобы расходы оказались в конце матрицы, то есть $x_i = (x_D, x_K)$, где $x_D = (x_1, x_{z-1})$ – расходы на участках дерева, $x_K = (x_z, x_u)$ – расходы на хордах.

Если за направления обхода взять направление хорды, и так как каждая хорда входит только в один цикл, матрицу контуров B можно записать в следующем виде:

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{1z-1} & 1 \\ \dots & \dots & 1 \\ b_{u-z+11} & b_{u-z+1z-1} & 1 \end{bmatrix}, \quad (1)$$

Следовательно, матрицы A и B приобретут следующий вид:

$$\bar{A} = \begin{array}{|c|c|} \hline \overline{A}_D & \overline{A}_K \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{l} \xrightarrow{u} \\ \xrightarrow{z-1} \end{array}$$

$$B = \begin{array}{|c|c|} \hline B_D & B_K \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{l} \xrightarrow{k} \\ \xrightarrow{z-1} \end{array}$$

то есть $B = (B_D, E_K)$, $\bar{A} = (\bar{A}_D, \bar{A}_K)$, где E – единичная матрица. Таким образом,

$$\bar{A}_D x_D + \bar{A}_K x_K = V, \quad (2)$$

следовательно,

$$x_D = \bar{A}_D^{-1} (V - \bar{A}_K x_K), \quad (3)$$

Матрица $\bar{A}_D^{-1}$, обратная к $\bar{A}_D$, здесь всегда существует, поскольку в случае графа-дерева его матрица соединений (без последней строки) будет иметь определитель отличный от нуля, матрица не особенная.

Выявим связь между матрицами соединений и контуров, то есть $\bar{A}$ и B . Рассмотрим однородную систему уравнений первого закона Кирхгофа: $\bar{A}x = 0$, и покажем, что любая строка матрицы B является ее решением. Действительно, пусть $a_j^T = (a_{j1} \dots a_{jn})$ – j -я строка A ($j = 1 \dots z-1$), а $b_r^T = (b_{r1} \dots b_{rn})$ – r -я строка B ($r = 1 \dots k$), где элементы a_{ji} и b_{ri} ($i = 1 \dots u$) принимает значение 0, 1 или -1.

В случае, когда контур r не проходит через узел j , ненулевые элементы a_{ji} и b_{ri} , имеют обязательно различные номера i и, поэтому, скалярное произведение $a_j^T b_r = 0$. Если же простой контур r проходит через узел j , то ему могут принадлежать лишь две ветви i_1, i_2 , инцидентные данному узлу, и только для них одновременно не равны нулю соответствующие эле-

менты a_{ji} и b_{ri} , так что скалярное произведение фактически будет сводиться к сумме двух слагаемых

$$a_j^T b_r = a_{ji_1} b_{ri_1} + a_{ji_2} b_{ri_2}, \quad (4)$$

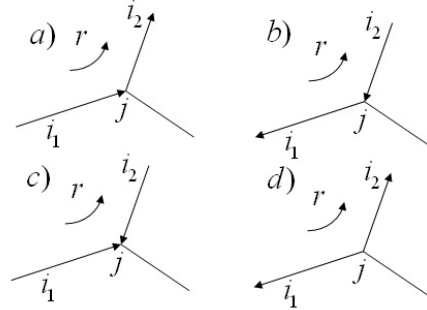


Рис. 1. Прохождение контура

Как видно из рисунка, в любом случае прохождения контура через узел j произведение в правой части равенства (4) обязательно имеет разные знаки так, что их сумма равна 0 и поэтому всегда $a_j^T b_r = 0$.

Так как это справедливо для любых j и r , то

$$\overline{A} b_r = 0, (r = 1..k), \quad (5)$$

То есть любая строка матрицы B (берущая здесь как вектор столбец) удовлетворяет системе (1). Это может быть записано сразу для всех строк, что приведет к искомому произведению матриц

$$\overline{A} B^T = 0, \quad (6)$$

Таким образом, если рассматривать матрицы блочной структуры, то

$$\overline{A} B^T = [\overline{A}_D \ \overline{A}_K] [B_D \ B_K]^T = [\overline{A}_D \ \overline{A}_K] [B_D \ E_K]^T = \overline{A}_D B_D^T + \overline{A}_K E_K^T = 0, \quad (7)$$

то есть

$$\overline{A}_D B_D^T + \overline{A}_K = 0, \quad (8)$$

откуда следует, что

$$B_D^T = -\overline{A}_D^{-1} \overline{A}_K, \quad (9)$$

Это выражение связывает матрицы B_D , $\overline{A}_K$, $\overline{A}_D$ и отражает тот факт, что матрица соединений $\overline{A}$ и выбранное на схеме цепи дерево однозначно определяет матрицу контуров B .

В.Ф. Шумилов

Муромский институт (филиал) Владимирского государственного университета

602264, г. Муром, ул. Орловская, д. 23

e-mail: uo@mivlgu.ru

О погрешностях вычисления определителей

Рассмотрим простейший определитель второго порядка $\det(A)$, в котором все члены матрицы A известны лишь с точностью до $\pm e$. Для такого определителя составляющие элементы имеют вид:

$$a \pm e a; \quad b \pm e b; \quad c \pm e c; \quad d \pm e d,$$

где a, b, c, d – номинальные значения, принятые в расчёте, e – числа, малые в сравнении с единицей; знак этих чисел неизвестен. Для истинных величин членов определителя можно лишь указать интервал, в котором они находятся. Так, например $a - e a \leq \bar{a} \leq a + e a$ ($\bar{a}$ – не известное нам истинное значение данного члена определителя).

Номинальное значение всего определителя будет, как известно равно: $\text{Det}(\text{ном}) = a d - c b$. Теперь установим интервал, внутри которого будет находиться истинное значение определителя при учете вышеприведенных неравенств. Развертывая определитель и пренебрегая квадратами малых чисел e , получим $\text{Det}(A) = a d \pm e a d - c b \pm e c b$. Теперь надо учесть, что неизвестные нам знаки погрешностей ($\pm$) могут комбинироваться так, что все члены, содержащие e , могут оказаться либо все положительными, либо все отрицательными. С учетом этого имеем:

$$\det(\text{ном}) - 2e \det(\text{мод}) \leq \det(A) \leq \det(\text{ном}) + 2e \det(\text{мод}),$$

где $\det(A)$ – это истинное, неизвестное нам, значение определителя, а $\det(\text{мод})$ будем называть “модульным определителем” и вычислять по формуле для вычисления номинального значения определителя по формуле, но каждый член заменяется на его модуль и между произведениями всегда стоит знак “плюс”, а не “минус”. Полученная выше формула даёт величину интеграла, внутри которого заключено истинное (неизвестное нам) значение $\det(A)$. Относительная погрешность вычисления определителя второго порядка не будет превышать величины: $z = \pm 2 e \det(\text{мод}) / \det(\text{ном})$. Поскольку, как легко видеть, $\det(\text{мод})$ может быть намного больше, чем $\det(\text{ном})$, то даже при малых e , при малых погрешностях членов, погрешность определителя может быть велика.

Отметим теперь, что в ходе эксплуатации того или иного технического объекта его параметры, а значит и коэффициенты соответствующей линейной системы алгебраической уравнений могут изменяться внутри интервала (если эта система является математической моделью либо самого объекта, либо его свойств). Поэтому погрешности e каждого коэффициента линейной системы часто могут изменяться и по величине и по знаку. Но это означает, к сожалению, что даже длительная безупречная работа любого исследуемого объекта не гарантирует того, что в самый неожиданный момент времени с ним не произойдет опасная авария. Длительная безупречная работа объекта означает всего лишь, что долгое время сочетания знаков отклонения реальных параметров от номинальных оказывались такими, что оценка определителя выполнялась с большим запасом. И поэтому для гарантии отсутствия аварий нужно, прежде всего, ориентироваться на хороший, правильный расчет. Если при погрешности, близкой к расчетной оценке, аварийных явлений не возникает, то только тогда можно быть уверенным, что в ходе эксплуатации аварий не будет. А длительная безупречная работа объекта – по причинам, только что изложенным, – к сожалению, ничего не гарантирует.

При этом надо отметить, что до последнего времени уделялось слишком мало внимания проблеме обеспечения надежности расчетов при неизбежных на практике погрешностях в задании исходных данных для расчёта, при неизбежных малых изменениях исходных данных расчета в ходе эксплуатации проектируемого объекта.

Литература

1. Петров, Ю.П. Неожиданное в математике и его связь с авариями и катастрофами / Ю.П. Петров, Л.Ю. Петров. – СПб.: БХВ-Петербург, 2005. – 224 с.

В.Ф. Шумилов

*Муромский институт (филиал) Владимирского государственного университета
602264, г. Муром, ул. Орловская, д. 23
e-mail: uo@mivlgu.ru*

Об элементарных эквивалентных преобразованиях

Эквивалентные преобразования, которые называют ещё равносильными преобразованиями, применяются в математике давно. Такие преобразования, как перенос членов уравнения из левой части в правую с изменением знака; умножение всех членов на число, не равное нулю; подстановка, то есть замена какого-либо члена уравнения на равный ему способны упростить уравнения и в то же время не изменяют их решений.

Эквивалентными преобразованиями называют те, при которых исходная и преобразованная системы уравнений эквивалентны (равносильны) одна другой, то есть имеют одно и то же множество решений. При этом надо оговаривать, какой именно смысл вкладывается в понятие “решение”. Так, например, уравнения

$$X^2 - 1 = 0 \quad \text{и} \quad X^4 - 1 = 0$$

эквивалентны между собой, если решениями могут быть только действительные числа, и будут неэквивалентны, если в качестве решений допускаются и комплексные числа.

Отметим, что в определение эквивалентного преобразования входит только тождество решений исходной и преобразованной системы. Никакие другие условия (однозначность преобразования, взаимная обратимость и т. п.) обязательными не являются и в определение эквивалентного преобразования не входят.

Простота и прозрачность простых эквивалентных преобразований привела к тому, что многие математики, а за ними инженеры и пользователи компьютеров стали верить, что эквивалентные преобразования ничего не меняют, и стали пользоваться ими так широко, что потеряли всякую осторожность. Безоглядное использование эквивалентных преобразований неверно и опасно, оно может привести к серьезным ошибкам. Эквивалентные преобразования, согласно классическому определению, не меняют самих решений как таковых. Но они совсем не обязаны сохранять неизменными некоторые важные свойства решений, как параметрическая устойчивость, непрерывная зависимость решений от коэффициентов и параметров и т. п. Отметим, что это простое обстоятельство было открыто профессором факультета прикладной математики и управления Санкт-Петербургского университета Юрием Петровичем Петровым и повлекло за собой много интересных и важных следствий.

В понятие эквивалентного преобразования полезно ввести и использовать некоторые уточнения. Рассмотрим, например, простую систему

$$\begin{aligned} 2x - 3y &= 1 \\ 2x + 3y &= 9, \end{aligned}$$

имеющую решения: $x = 2$; $y = 1$. Если сложим первичную систему уравнений, то получим уравнение $5x = 10$ с решением $x = 2$. Будет ли уравнение $5x = 10$ эквивалентно основной системе. Формального соответствия приведенному определению эквивалентных систем здесь нет. Однако по отношению к переменной x система и одно уравнение эквивалентны и подобные преобразования полезны. Они используются, например, в известном классическом методе Гаусса решения систем линейных уравнений.

Используют также преобразования, не имеющие решений исходного уравнения, не вводящие новые решения, которые исходному уравнению не удовлетворяют. Подобные преобразования, добавляющие новые решения, не удовлетворяют определению эквивалентного преобразования, но они полезны и широко используются. Действительно, какие бы преобразования мы не использовали, полученные решения все равно надо проверять подстановкой в исходное уравнение; при этом лишние решения будут отсеяны.

Литература

1. Петров, Ю.П. О скрытых опасностях, содержащихся в традиционных методах проверки устойчивости / Ю.П. Петров.– Известия вуз. Электромеханика.– 1991.– № 11.– С. 106-108.