Чекушкин В.В., Михеев К.В.
Муромский институт (филиал) Владимирского государственного университета
602264, г. Муром Владимирской обл., ул. Орловская, 23
E-mail: kiri-mikheev@yandex.ru

Создание банка данных воспроизведения стандартных функций с диапазоном представления от 3 до 64 двоичных разрядов.

Целевая функция оптимизации специализированных алгоритмов воспроизведения функциональных зависимостей с устранением излишней точности E соответствует отношению последовательного дискретного приращения максимального числа значащих двоичных разрядов операндов выходных данных G при минимальном возрастании сложности вычислительных алгоритмов и соответственно времени их реализации C [1-3]. Оценка эффективности алгоритма наглядно иллюстрируется максимизируемым выигрышем G при ограниченных затратах C, не превосходящих некоторой величины C* или минимизируемыми затратами, при условии, что выигрыш от применения алгоритма не менее заданного G*:

$$\mathrm{E} = \mathrm{G} \to \max\left|\mathrm{C} \le \mathrm{C}^*,\ \mathrm{E} = \mathrm{G} \to \min\right|\mathrm{C} \ge \mathrm{C}^*, \mathrm{E} = \mathrm{G}/(\mathrm{A}+\mathrm{m}), \qquad (1)$$

где G – число значащих двоичных цифр результата или их приращения ΔG от некоторых начальных условий, C=A+m – число выполненных операций или их приращение Δ(A+m). Исходя из вышеизложенного, создан оптимизированный банк воспроизведения стандартных функций tg, arctg, arcsin в диапазоне 3…64 значащих цифр результата.

Для функции sin(x) предварительно исследованы полиномы наилучшего приближения на интервале $x \in [0;\pi/2]$ (таблица 1), поскольку переход к интервалу $x \in [0;2\pi]$ легко осуществляется с использованием формул приведения.

Таблица 1. Полиномы наилучшего приближения $\sin(x)$ на интервале $x \in [0;\pi/2]$

№	Формулы полиномов		$\delta_{мм}$	$A+m$
0	$a_0 \ne 0$	$P(x) = 0.5$	0.5	1
1	$a_0 \ne 0\ a_1 = 1$	$P(x) = -0.285 + x$	0.285	2
	$a_0 = 0\ a_1 \ne 1$	$P(x) = 0.7246 \cdot x$	0.137	2
	$a_0 \ne 0\ a_1 = 1$	$P(x) = 0.105 + 0.636 \cdot x$	0.105	4
3	$a_0 = 0\ a_1 = 1$	$P(x) = x - 0.14966 \cdot x^3$	0.01	5
	$a_0 = 0\ a_1 \ne 1$	$P(x) = x \cdot (0.9857 - 0.1426 \cdot x^2)$	0.006	6
	$a_0 \ne 0\ a_1 \ne 1$	$P(x) = 0.0035 + x \cdot (0.9794 - 0.1409 \cdot x^2)$	0.005	8
5	$a_0 = 0\ a_1 = 1$	$P(x) = x + (-0.16607 + 0.00763 \cdot x^2) \cdot x^3$	$1.4 \cdot 10^{-4}$	8
	$a_0 = 0\ a_1 \ne 1$	$P(x) = x \cdot (0.999659 + (-0.165626 + 0.0075 \cdot x^2) \cdot x^2)$	$8 \cdot 10^{-5}$	9
	$a_0 \ne 0\ a_1 \ne 1$	$P(x) = 0.000056 + x \cdot (0.999559 + (-0.165581 + 0.007494 \cdot x^2) \cdot x^2)$	$7 \cdot 10^{-5}$	11
7	$a_0 = 0\ a_1 \ne 1$	$P(x) = x + (-0.16665438 + (0.0083089\text{-}0.00018384 \cdot x^2) \cdot x^2) \cdot x^3$	$1.5 \cdot 10^{-6}$	11
	$a_0 = 0\ a_1 \ne 1$	$P(x) = x \cdot (0.99999692 + (-0.16664889 + (0.00830678\text{-}$ $-0.00018374 \cdot x^2) \cdot x^2) \cdot x^2)$	$7 \cdot 10^{-7}$	12
	$a_0 \ne 0\ a_1 \ne 1$	$P(x) = 0.00000054 + x \cdot (0.99999491 + (-0.16664577 + (0.0083048\text{-}$ $-0.00018334 \cdot x^2) \cdot x^2) \cdot x^2)$	$6 \cdot 10^{-7}$	14
9	$a_0 = 0\ a_1 = 1$	$P(x) = x + (-0.166666515 + (0.008332906 + (-0.0001979999 +$ $+ 0.00000258769 \cdot x^2) \cdot x^2) \cdot x^2) \cdot x^3$	$1 \cdot 10^{-8}$	14

№	Формулы полиномов		$\delta_{мм}$	$A+m$
	$a_0=0\ a_1\neq 1$	$P(x)=x\cdot(0.999999974755+(-0.166666469385+(0.008332892062+(-0.00019800584+0.000002590091\cdot x^2)\cdot x^2)\cdot x^2)\cdot x^2)$	$3.47\cdot 10^{-9}$	15
	$a_0\neq 0\ a_1\neq 1$	$P(x)=0.00000000282+x\cdot(0.99999996413+(-0.16666644834++(0.008332871968+(-0.00019799744+0.00000258882\cdot x^2)\cdot x^2)\cdot x^2)\cdot x^2)$	$3.2\cdot 10^{-9}$	17
11	$a_0=0\ a_1=1$	$P(x)=x+(-0.16666666561+(0.008333329213+(-0.000198406823+(0.000002751799-0.0000000237861\cdot x^2)\cdot x^2)\cdot x^2)\cdot x^2)\cdot x^3$	$6\cdot 10^{-11}$	17
	$a_0=0\ a_1\neq 1$	$P(x)=(0.999999999874+(-0.166666665294+(0.008333329026++(-0.0001984068315+(0.0000027518132--0.000000023785\cdot x^2)\cdot x^2)\cdot x^2)\cdot x^2)\cdot x^2)\cdot x$	$1.7\cdot 10^{-11}$	18
	$a_0\neq 0\ a_1\neq 1$	$P(x)=0.000000000014+(0.999999999822+(-0.166666665182+(0.0083333288855+(-0.0001984067409+(0.0000027517847--0.0000000237815\cdot x^2)\cdot x^2)\cdot x^2)\cdot x^2)\cdot x^2)\cdot x$	$1.45\cdot 10^{-11}$	20

Для полинома 1-й степени $P(x)=0.7246\cdot x$ число операций равно 2, для полинома 3-й степени 6 и в последующем число операций увеличивается на 3, и каждый раз число констант в памяти надо увеличивать на 1. После стартового приближения функции для полинома 1-й степени при $a_0=0\ \ a_1\neq 1$ примерно с тремя двоичными цифрами результата на две двоичные операции в дальнейшем при увеличении степени полинома на 2 получаем хорошие нарастающие приращения числа разрядных цифр на одну операцию: 1.06 разрядных цифр (с полинома 1-й степени на полином 3-й степени), 2 с полинома 3-й степени на полином 5-й степени), 2.3 с полинома 5-й степени на полином 7-й степени , 2.4 двоичных цифры для полинома 9-й степени на одну операцию. Для функции sin(x) введение на интервале $[0;\pi/2]$ двух подинтервалов с двумя полиномами 1-й степени с одинаковыми значениями погрешности метода обеспечивает уменьшение погрешности по сравнению с полиномом $P(x)=0.7246\cdot x$ в 5.75 раза при увеличении сложности алгоритма на 4 операции, таким образом не получаем приращения и в одну разрядную цифру на операцию.

При вычислении более медленно сходящейся функций tg(x), приемлемым является набор полиномов наилучшего приближения с нечетными степенями на интервале $x\in[-\pi/4;\pi/4]$. Для вычисления функции arcsin(x) предпочтительным является интервал [0;0.707]. Исходя из вышеизложенного, создан оптимизированный банк воспроизведения стандартных функций sin, tg, arctg, arcsin в диапазоне 3…64 значащих цифр результата.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 14-07-00293).

Литература

1. Чекушкин В.В. Быстродействующие методы воспроизведения функциональных зависимостей в радиоэлектронных системах // Радиотехнические и телекоммуникационные системы. 2014. № 1. С. 87-99.

2. Чекушкин В.В., Михеев К.В., Пантелеев И.В. Совершенствование полиномиальных методов воспроизведения функциональных зависимостей в информационно-измерительных системах // Измерительная техника. 2015. № 4. С. 16-21.

3. Checkushkin V.V., Mikheev K.V., Panteleev I.V. Improving Polynomial Methods of Reconstruction of Functional Dependences in Information-Measuring Systems. Measurement Techniques July 2015, Volume 58, Issue 4, pp 385-392.