В.А. Короткий
ЯВВУ ПВО
150001, г. Ярославль, Московский проспект, д. 28.
e-mail: vkorotkii@yandex.ru

Математическое моделирование процесса обучения

Значительные изменения в системе высшего образования приводят к необходимости ответить на ряд неотложных вопросов: 1)какая методика преподавания является наиболее эффективной в условиях гигантского информационного потока (в среднем 36 Гигабайт в день на одного человека), 2)как изменилось психо-физиологическое восприятие информации обучающимися в этих условиях, 3)как использовать особенности профессиональной направленности обучающихся для достижения наивысшего качества образования.

В этой связи важно проанализировать различные модели обучения, основанные на запоминании, переработке и хранения информации, где сутью самого процесса обучения является дозированное управление информационными потоками, предъявляемыми испытуемому. Основные способы оценки эффективности этих моделей — построение соответствующих кривых, отражающих либо динамику объема запоминаемой информации, либо количество правильно исполненных поведенческих актов.

В литературе выделяют четыре основные модели [1]: 1)эмпирические математические модели для аппроксимации кривой обучения; 2)модели, основанные на обыкновенных дифференциальных уравнениях или на уравнениях в частных производных; 3)модели, основывающиеся на рациональных уравнениях, выводимых из некоторых базисных теорий, отражающих взаимоотношения, обнаруженные в экспериментальных данных; 4)модели, базирующиеся на системном подходе с использованием передаточных функций.

В настоящей работе на основе теории обыкновенных дифференциальных уравнений делается попытка моделирования процесса распространения знаний и управления процессом обучения с учетом уровня квалификации преподавателей в учебной группе ВУЗа на основе дифференциального уравнения вида:

$$\dot{N} = \sigma N(N^* - N) + U, \qquad (1)$$

где $N^* -$ предельное значение степени обученности; $U -$ управляющее воздействие, учитывающее а)воспитательную работу преподавателей и деканатов, б)контрольные мероприятия по плану учебных дисциплин, в)квалификацию педагогического состава ВУЗа, г)личную мотивацию и усилия обучающегося по освоению учебной дисциплины (это может быть одно занятие, занятия по одной дидактической единице, занятия за семестр, или несколько семестров по одной или нескольким учебным дисциплинам, или занятия за весь период обучения в ВУЗе (т.е. за любой интервал применения управляющего воздействия); $\sigma -$ коэффициент пропорциональности, отражающий ключевые особенности динамики высшего образования; N - количество знаний в учебной группе; $\dot{N} -$ скорость изменения уровня знаний в группе. Выбор уравнения такого типа представляется вполне обоснованным по следующим соображениям.

1.Скорость распространения конкретного знания в группе тем больше, чем больше число «носителей» этого знания и чем больше число потенциальных носителей, не обладающих пока этим знанием. С ростом числа членов группы овладевших знанием, скорость роста (распространения) знания в группе уменьшается. Заметим, что такое уравнение применимо в тех учебных заведениях, где сложились традиции взаимопомощи в среде студентов. Будем рассматривать ВУЗы, существующие много лет, поэтому будет естественно предположить, что коэффициент пропорциональности σ равен постоянной величине, своей в каждой учебной группе, на каждом факультете и в каждом отдельном ВУЗе.

2.Очевидно, что скорость обучаемости напрямую связана с качеством воспитательной и учебной работы со студентами, качеством учебных программ и организацией учебного процесса в конкретном ВУЗе. Рассмотрим сложившиеся коллективы специалистов, удовлетворяющие стандартным требованиям Министерства образования и науки РФ, где недостаток опыта молодых специалистов компенсируется высоким уровнем учебно-методических комплексов кафедр ВУЗов, детально проработанной системе работы по повышению методического мастерства сотрудников. Поэтому вполне обоснованным выглядит наше предположение о том, что управляющее воздействие в ВУЗе должно быть нарастающим по интенсивности во времени. Таким образом, примем в (1)

$$U = a + bt + ct^2. \tag{2}$$

Разделим множество обучаемых студентов на две подгруппы. К первой подгруппе отнесем сильных по успеваемости студентов, ко второй - слабых. Это распределение условное, оно не отражает степени одаренности, начальной подготовки, трудолюбия, мотивировки. Однако исследование даже такой простой модели позволяет получить интересные качественные результаты. Составим для указанных подгрупп систему из двух дифференциальных уравнений, отражающих средний уровень знаний студентов

$$\begin{cases} \dot{N}_1 = \sigma_1 N_1 (N_1^* - N_1) + U_1, \\ \dot{N}_2 = \sigma_2 N_2 (N_2^* - N_2) + U_2. \end{cases} \tag{3}$$

С учётом принципа объективности и единства требований в каждом отдельно взятом ВУЗе, естественно положить $N_1^* \approx N_2^* \equiv N^*$ и $\sigma_1 \approx \sigma_2 \equiv \sigma$.

Система (2) – система нелинейных уравнений. Заметим, что каждое уравнение системы – уравнение Риккати, в общем случае не интегрируемое в квадратурах. Однако, если угадать частное решение уравнения, то общее решение можно легко получить по хорошо известному алгоритму. Учитывая вид управляющего воздействия (2), нетрудно понять, что частное решение (3) может иметь вид

$$\breve{N}_1 = n_{01} + n_1 t, \tag{4}$$

где $n_{01}, n_1 -$ константы. Подставляя (4) в (3), найдём:

$$a_1 = n_1 - \sigma N^* n_{01} + \sigma n_{01}^2, \tag{5}$$

$$b_1 = -\sigma N^* n_1 + 2 n_{01} n_1 \sigma, \tag{6}$$

$$c_1 = \sigma n_1, \tag{7}$$

где $U_1 = a_1 + b_1 t + c_1 t^2$.

Из (5) заключаем, что положительный эффект для роста знаний от одного факта попадания абитуриента в ВУЗ обеспечивается (с первых дней занятий) только высокой скоростью (точнее ускорением) нарастания знаний. То есть преимущества традиций высшего образования «сработают» только в условиях значительной (сбалансированной) учебной нагрузки $\left(n_1 > \sigma n_{01}\left(N^* - n_{01}\right)\right)$ на начальном этапе.

Из (6) видим, что скорость распространения знаний от управляемых воздействий будет выше, если предельное (асимптотическое) знание превышает начальное знание студента менее, чем в 2 раза: $2n_{01} > N^*$.

Из (7) имеем: рост знаний $\left(n_1\right)$ может быть обеспечен только резко нарастающими управляющими воздействиями (пропорционально t^2).

Все эти качественные выводы, указывают на приоритетное значение дозирования новой информации в учебном процессе и научного обоснования сроков и объёмов контрольных мероприятий и мер воспитательного воздействия при анализе их итогов.

Симметрия обоих уравнений (3) указывает на существование аналогичных решений для слабой группы. Единственным отличием, на наш взгляд, является дополнительный вклад в управляющее воздействие U_2 со стороны «сильных» студентов, что может проявляться в коэффициентах a_2, b_2 или c_2, в зависимости от конкретной ситуации, сложившейся в учебной группе и традиций учебного заведения.

Ясно, что в $\hat{N}_2 = n_{02} + n_2 t$ коэффициенты n_{01} и n_{02} связаны соотношением n_{01} ? n_{02}. Поэтому в условиях, когда невозможно сильно варьировать t , необходимо резко увеличить n_2 ($\hat{N}_1$ и $\hat{N}_2$ стремятся к N^* при $t \to T$, где $T -$ анализируемый период обучения). А это возможно только при быстро нарастающем $\left(\sim t^2\right)$ управляющем воздействии.

Общее решение (3) будем искать в виде:

$$N_1 = \hat{N}_1 + \tilde{N}_1.$$

Для $\tilde{N}_1$ получим уравнение

$$\dot{\tilde{N}}_1 = -\sigma \tilde{N}_1^2 + \left(-2\sigma\left(n_{01} + n_1 t\right) + \sigma N^*\right)\tilde{N}_1 . \qquad (8)$$

Пусть $z \equiv 1/\tilde{N}_1, \alpha \equiv 2\sigma n_{01} - \sigma N^*, \beta \equiv 2\sigma n_1.$ Тогда вместо (8) имеем уравнение Бернулли:

$$\dot{z} + \left(\alpha + \beta t\right) z = \sigma .$$

Будем искать общее решение этого уравнения в виде $z(t) = u(t)\cdot\upsilon(t)$. Для υ найдём $\upsilon = \exp\dfrac{\left(\alpha+\beta t\right)^2}{2\beta}$, тогда $u = \sigma\sqrt{\dfrac{2}{\beta}}\left(\displaystyle\int \exp\dfrac{-\left(\alpha+\beta t\right)^2}{2\beta}dt + C\right)$. Понятно, что с ростом t функция *u* быстро убывает и стремится к некоторому постоянному значению. В пределе (при $t \to \infty$ получим интеграл Пуассона)

$$u = \sigma\sqrt{\frac{2}{\beta}}\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sigma\sqrt{\frac{\pi}{2\beta}}$$.Наконец, $$\tilde{N}_1(t) \approx \frac{1}{\sigma}\sqrt{\frac{2\beta}{\pi}}\exp\frac{-\left(\alpha+\beta t\right)^2}{2\beta}.$$

Окончательно (для больших *t*):

$$N_1(t) \approx n_{01} + n_1 t + \frac{1}{\sigma}\sqrt{\frac{2\beta}{\pi}}\exp\frac{-\left(\alpha+\beta t\right)^2}{2\beta}$$

Таким образом, построенная модель демонстрирует вполне разумный линейный закон распространения знаний в учебной группе ВУЗа с абсолютно понятными поправками, характерными для нормального распределения (любой величины), учитывающими случайные процессы в однородных больших (более 25 человек) коллективах.

Обращает на себя внимание тот факт, что при постоянном во времени (не нарастающем) управляющем воздействии коэффициент $\sigma -$ отрицательный и скорость распространения знаний, максимальная вначале образовательного процесса постепенно убывает с течением времени. Данная модель тоже несёт интересные качественные и количественные результаты и будет служить предметом дальнейшего исследования.

Литература

1. Степанов И. И., Ефремов О. М., Суворов Н. Б., Даниловский М. М., Майданов Н. П., Шклярук С. П., Информативность математической модели процесса обучения, Информационно-управляющие системы, ФГУП Политехника (С.-Пб), №1, 2011, с.34-39.