Михеев К.В.
Муромский институт (филиал) федерального государственного образовательного учреждения высшего образования «Владимирский государственный университет имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»
602264, г. Муром, Владимирская обл., ул. Орловская, 23
E-mail: kiri-mikheev@yandex.ru

Совершенствованный набор алгоритмов вычисления функции arcsin (x)

Специализированные вычислительные устройства обширно используются в приборах для генерации сигналов, в том числе гармонических, в быстродействующих цифровых вычислительных синтезаторах с аппаратурной реализацией воспроизведения реализуемых на практике стандартных функций sin (x), tg (x), arcsin (x). Прямой расчет отмеченных функций в специализированных вычислительных устройствах, как правило, невозможен, следовательно прибегают либо к табличному заданию функции, что связано с большими затратами памяти, либо используют приближенные методы расчета. Перспективный метод аппроксимации реализуется на использовании полиномов Чебышева. В работе отражен анализ метода получения полиномов наилучшего приближения на примере поиска значений функции arcsin (x). Как показали результаты работы для расчета функции arcsin (x) одного полинома на всем интервале задания аргумента $x\in[-1;1]$ при максимальных значениях погрешностей аппроксимации δ_{MM} от 0,15 до 0,0015 обеспечивается несущественное приращение числа значащих цифр результата на 1 операцию при последовательном дальнейшем увеличении степени полинома с 1-й до 9-й и выше. Соответственно, для поиска ряда полиномов с большим увеличением значений приращения числа двоичных цифр результата на одну операцию рассмотрен интервал [0;0,707].

В [1,2] были разработаны алгоритмы поиска полиномов наилучшего приближения различных степеней. Для рассматриваемой функции в интервале значений аргумента [0;0,707] найдены полиномы с нечетными степенями (таблица 1) для широко применяемых на практике областей значений угла $[0^0;45^0]$ при значениях максимальных погрешностей δ_{MM} от $2{,}09851\cdot10^{-2}$ до $6{,}229703\cdot10^{-9}$. Уменьшение максимальной погрешности для полиномов 3-й, 5-й, 7-й, 9-й и 11-й степеней по сравнению с полиномами нечетных степеней на порядок ниже составит соответственно: 20,98/1,6 = 13,1, 16,02/1,628 = 9,84, 16,28/1,897 = 8,582, 18,97/2,392 = 7,94, 23,92/3,188 = 7,5. Итак, будет иметь место приращение порядка 1-й разрядной двоичной цифры на одну операцию. Был рассмотрен вариант возможности уменьшения дискрета приращения числа операций путем прямого исключения константы a_i в полиноме (a_1 = 1, полином №2` в таблице 1). В таком случае уменьшение числа операций обеспечивает сокращение максимальной погрешности по сравнению с полиномом 1-й степени только в 20,98/7,96 = 2,62 раза.

Для поиска полиномов с большим увеличением значения приращения числа двоичных цифр результата на одну операцию, интервал [0;0,707] был разбит на два подинтервала с двумя полиномами и примерно равными максимальными погрешностями δ_{MM} (таблица 2). В результате проведенной работы для двух полиномов 1-й степени уменьшение максимальной погрешности δ_{MM} не целесообразно. Для двух полиномов 7-й степени с общим числом операций - 16, максимальное значение погрешности будет равно $5{,}35\cdot10^{-7}$.

Реализована взаимная компенсация составляющих погрешностей для уменьшения разрядных сеток операндов [3]. Применение алгоритма компенсации составляющих погрешностей гарантирует уменьшение разрядных сеток операндов на 2-3 двоичных разряда для полинома 7-й степени и выше.

Использование урезанного интервала для значений угла от 0^0 до 45^0 обеспечивает приращение одной двоичной цифры результата на одну операцию, что примерно в 3 раза больше приращения для значений углов от 0^0 до 90^0.

Таблица 1. Полиномы вычисления arcsin (x) на интервале $x \in [0; 0,707]$

№	Формулы полиномов		Максимальная погрешность	Количеств о операций	
				А+	А
1	$a_0 = 0$ $a_1 \neq 1$	$P(\mathrm{x}) = 1{,}08 \cdot \mathrm{x}$	$2{,}0910^{-2}$	4	2
2	$a_0 = 0$ $a_1 \neq 1$	$P(x) = x \cdot (0{,}9895 + 0{,}2379 \cdot x^2)$	$1{,}6 \cdot 10^{-3}$	6	4
2\`	$a_0 = 0$ $a_1 = 1$	$P(\mathrm{x}) = \mathrm{x} + 0{,}2379 \cdot \mathrm{x}^3$	$7{,}96 \cdot 10^{-3}$	5	3
3	$a_0 = 0$ $a_1 \neq 1$	$P(\mathrm{x}) = \mathrm{x} \cdot (1{,}0015 + \mathrm{x}^2 \cdot (0{,}1453 + 0{,}1454 \cdot \mathrm{x}^2))$	$1{,}62 \cdot 10^{-4}$	9	6
4	$a_0 = 0$ $a_1 \neq 1$	$P(\mathrm{x}) = \mathrm{x} \cdot (0{,}99977 + \mathrm{x}^2 \cdot (0{,}17219 + \mathrm{x}^2 \cdot (0{,}04023 + 0{,}11817 \cdot \mathrm{x}^2)))$	$1{,}89 \cdot 10^{-5}$	12	8

Таблица 2. Полиномы вычисления arcsin(x) с разбиением на подинтервалы

№	Интервал	Формула полинома	δ_{MM}
1	$[0;0{,}475]$	$P(\mathrm{x}) = 1{,}042 \cdot \mathrm{x} - 0{,}004$	$3{,}98 \cdot 10^{-3}$
	$[0{,}475;0{,}707]$	$P(\mathrm{x}) = 1{,}251 \cdot \mathrm{x} - 0{,}103$	
2	$[0;0{,}499]$	$P(\mathrm{x}) = 0{,}0001 + \mathrm{x} \cdot (0{,}9973 + 0{,}1968 \cdot \mathrm{x}^2)$	$1{,}66 \cdot 10^{-4}$
	$[0{,}499;0{,}707]$	$P(\mathrm{x}) = 0{,}0371 + \mathrm{x} \cdot (0{,}8885 + 0{,}3389 \cdot \mathrm{x}^2)$	
3	$[0; 0{,}511]$	$P(\mathrm{x}) = -8{,}92 \cdot 10^{-6} + \mathrm{x} \cdot (1{,}00021 + \mathrm{x}^2 \cdot (0{,}16238 + 0{,}10272 \cdot \mathrm{x}^2))$	$8{,}9 \cdot 10^{-6}$
	$[0{,}511;0{,}707]$	$P(\mathrm{x}) = -0{,}01662 + \mathrm{x} \cdot (1{,}05802 + \mathrm{x}^2 \cdot (0{,}02646 + 0{,}25181 \cdot \mathrm{x}^2))$	

Разработан совершенствованный набор алгоритмов вычисления функции arcsin(x) с исключением избыточной точности. Математическое моделирование алгоритмов обеспечило сокращение разрядных сеток специализированных вычислительных устройств на 2-5 двоичных разряда.

Литература

1. Чекушкин, В.В. Совершенствование полиномиальных методов воспроизведения функциональных зависимостей в информационно-измерительных системах / В.В. Чекушкин, К.В. Михеев, И.В. Пантелеев // Измерительная техника. 2015. № 4. С. 16-21.

2. Чекушкин, В.В. Быстродействующие алгоритмы поиска полиномов наилучшего приближения для воспроизведения функциональных зависимостей в информационно-измерительных системах / В.В. Чекушкин, К.В. Михеев // Измерительная техника. - 2016. – №4. - С. 7-10.

3. Чекушкин, В.В. Программа поиска полиномов наилучшего приближения для воспроизведения функциональных зависимостей с взаимной компенсацией составляющих погрешностей результата / В.В. Чекушкин, К.В. Михеев // Свидетельство об официальной регистрации программы для ЭВМ №2015610539 от 13.01.2015.