

## Оценивание амплитудно–фазового распределения широкополосных сигналов в многоэлементных антенных решётках

Н.Г. Пархоменко

Федеральное государственное унитарное предприятие «Государственное конструкторское бюро аппаратно-программных систем «Связь», Ростов-на-Дону, проспект Соколова, 96, gkbsviaz@gin.ru

*Рассмотрены два метода оценивания амплитудно–фазового распределения широкополосных сигналов – метод когерентного усреднения и метод собственных векторов. Проведён вычислительный эксперимент, в котором сравнивалась эффективность методов по выходному отношению сигнал/шум. Показано, что метод собственных векторов более эффективен по указанному критерию.*

*Two methods of amplitude-phase distribution estimation for broadband signals: coherent averaging method and Eigenvector Following method are considered. A computational experiment where the method efficiencies were compared by the output value of signal-noise ratio was carried out. It is shown that Eigenvector Following method is more effective for this criterion.*

Основными задачами обработки сигналов пассивными многоэлементными антенными системами являются обнаружение сигналов и измерение их параметров, таких, как центральная частота, полоса и средняя энергия сигнала, а также угловые координаты источника радиоизлучения. Широкое использование сложных сигналов с расширенным спектром и, соответственно, с низкой спектральной плотностью мощности в системах связи, локации, опознавания и других повышает актуальность задачи оценки их параметров. Оптимальным способом обработки таких сигналов является согласованная фильтрация, которая не может быть использована в условиях априорной неопределённости относительно вида сигнала.

Рассмотрим способ обработки сигналов [1–4], который заключается в когерентном приеме и цифровой регистрации  $M \times Q$  матрицы сигналов, где  $M$  – число антенных элементов в решетке,  $Q$  – объем выборки (число отсчётов сигналов). Переходя в частотную область с использованием дискретного преобразования Фурье, которое применяется к строкам матрицы сигналов, получим спектральную  $M \times (Q/2 + 1)$  матрицу  $\mathbf{S}_0 = (\mathbf{s}_0, \dots, \mathbf{s}_{Q/2})$ , где  $\mathbf{s}_q$  –  $M \times 1$  столбцы матрицы  $\mathbf{S}_0$ ,  $q \in [0, Q/2]$ . Для обнаружения сигнала в частотной области может использоваться метод пространственной корреляции, который заключается в вычислении пространственной корреляционной матрицы  $\mathbf{K}$  с элементами

$$K_{kk'} = \mathbf{s}_k^+ \mathbf{s}_{k'} / \|\mathbf{s}_k\| \|\mathbf{s}_{k'}\|,$$

где  $k, k' \in [0, Q/2]$ , символ  $(\cdot)^+$  означает эрмитово сопряжение, а евклидова норма вектора  $\|\mathbf{s}\|^2 = \mathbf{s}^+ \mathbf{s}$ . Обнаружение частотной области сигнала осуществляется по критерию превышения заданного порога модулями элементов матрицы  $\mathbf{K}$ .

Поскольку спектральная область сигнала локализована, постольку в матрице  $\mathbf{S}_0$  достаточно сохранить только сигнальные компоненты. Тогда оценку амплитудно–фазового распределение поля на элементах решетки (АФР) можно получить когерентным усреднением частотных компонент в полосе сигнала по формуле

$$\xi_0 = \mathbf{S}_0 \mathbf{g}_{m_0},$$

где  $\mathbf{g}_{m_0}$  – вектор–столбец матрицы  $\mathbf{S}_0^+$  сигнала на антенне с номером  $m_0$ , принятой за опорную. Такой метод естественно назвать методом когерентного усреднения.

Последующее оценивание направления на источник радиоизлучения производится либо по максимуму модуля, либо по максимуму реальной части комплексной диаграммы направленности антенной решетки. На заданной сетке  $N$  направлений с азимутами  $\alpha_n$  и  $\beta_n$ ,  $n \in [1, N]$ , вектор комплексной диаграммы направленности  $\mathbf{D}$  размерности  $N \times 1$  определяется выражением вида

$$\mathbf{D} = \mathbf{A}^+ \xi_0,$$

где  $\mathbf{A}$  – фазирующая матрица размерности  $M \times N$ , элементы которой зависят от пространственной конфигурацией антенной решетки и принятой модели волнового фронта. Для всенаправленных антенных элементов и плоского волнового фронта

$$A_{mn} = \exp\{-2\pi i [r_m \cos \beta_n \cos(\alpha_n - \alpha_m) + z_m \sin \beta_n] f / c\},$$

где  $r_m, \alpha_m, z_m$  – цилиндрические координаты фазового центра соответствующего антенного элемента,  $f$  – центральная частота сигнала,  $c$  – скорость света. Если элементы решётки обладают направленностью, то  $A_{mn}$  следует умножить на  $G_m(\alpha_n, \beta_n)$ , где  $G_m(\alpha, \beta)$  – диаграмма направленности  $m$ -го элемента.

К недостаткам рассмотренного подхода следует отнести наличие выделенной опорной антенны, относительно которой отсчитываются разности фаз сигналов, и недостаточную эффективность при значениях отношения сигнал/шум, не превосходящих 10 дБ. Следовательно, указанный метод не может быть использован для обработки сложных сигналов с низкой спектральной плотностью мощности и низким отношением сигнал/шум.

Рассмотрим другой способ оценивания АФР, идейно близкий методам высокого разрешения [5,6] и в значительной степени свободный от указанных недостатков. Будем предполагать, что достаточно мощные узкополосные сигналы обнаружены, обработаны и тем самым исключены из рассмотрения.

Если групповое время запаздывания сигнала на апертуре решётки существенно меньше величины, обратной полосе частот, то модель сигнала на элементах решётки

$$\mathbf{S} = \xi \mathbf{a}^+, \quad (1)$$

где  $\xi$  и  $\mathbf{a}^+$  – неизвестные векторы АФР и спектра сигнала. Из соотношения (1) следует, что обработка сигнала в частотной и пространственной областях может производиться независимо. Тогда основная система уравнений, из которой следует находить оценки векторов  $\xi$  и  $\mathbf{a}$  из имеющихся данных, записывается в виде

$$\mathbf{S}_0 = \xi \mathbf{a}^+, \quad (2)$$

Система уравнений (2) является переопределённой и, вообще говоря, не имеет решений. Квазирешение системы (2) будем искать методом наименьших квадратов.

Для невязки системы уравнений (2) пишем:

$$\Delta = tr(\mathbf{b}^+ \mathbf{b}), \quad \mathbf{b} = \mathbf{S}_0 - \xi \mathbf{a}^+, \quad (3)$$

где символ  $tr(\cdot)$  означает операцию взятия следа матрицы. Дифференцируя выражение (3) по  $\xi^+$  и  $\mathbf{a}^+$  и приравнявая производные к нулю, получаем систему уравнений вида

$$\mathbf{S}_0 \mathbf{a} = \|\mathbf{a}\|^2 \xi, \quad \mathbf{S}_0^+ \xi = \|\xi\|^2 \mathbf{a}, \quad (4)$$

из множества решений которой следует выбрать то, которое доставляет минимум невязке  $\Delta$ . Учитывая возможность циклической перестановки сомножителей под знаком  $tr$ , переписываем выражение (3) в виде

$$\Delta = tr(\mathbf{S}_0^+ \mathbf{S}_0 - \mathbf{S}_0^+ \boldsymbol{\xi} \mathbf{a}^+ - \boldsymbol{\xi}^+ \mathbf{S}_0 \mathbf{a}) + \|\boldsymbol{\xi}\|^2 \|\mathbf{a}\|^2.$$

Отсюда с учётом уравнений (4) находим:

$$\Delta = tr(\mathbf{S}_0^+ \mathbf{S}_0) - \|\boldsymbol{\xi}\|^2 \|\mathbf{a}\|^2. \quad (5)$$

Следовательно, минимум невязки  $\Delta$  достигается на том решении системы уравнений (4), для которого произведение  $\|\boldsymbol{\xi}\|^2 \|\mathbf{a}\|^2$  максимально.

Полагая  $\mathbf{u} = \boldsymbol{\xi} / \|\boldsymbol{\xi}\|$ ,  $\mathbf{v} = \mathbf{a} / \|\mathbf{a}\|$  и вводя обозначение  $\mu = \|\boldsymbol{\xi}\| \|\mathbf{a}\|$ , приходим к задаче разложения матрицы  $\mathbf{S}_0$  по сингулярным числам [7,8]:

$$\mathbf{S}_0 \mathbf{v} = \mu \mathbf{u}, \quad \mathbf{S}_0^+ \mathbf{u} = \mu \mathbf{v}. \quad (6)$$

Эта задача имеет  $M$  решений – вещественных и неотрицательных сингулярных чисел  $\mu_m$  и нормированных векторов  $\mathbf{u}_m$  и  $\mathbf{v}_m$ , из которых следует выбрать то, которое доставляет минимум невязке (3). Эти значения, согласно выражению (5), равны

$$\Delta_m = tr(\mathbf{S}_0^+ \mathbf{S}_0) - \mu_m^2.$$

Следовательно, если  $\mu_0$  – максимальное сингулярное число, то для оценки вектора АФР следует использовать соответствующий ему вектор  $\mathbf{u}_0$  [9]. Такой метод оценивания АФР можно назвать методом собственных векторов.

Вектор  $\mathbf{u}_0$  целесообразно искать итерационным методом для сингулярного разложения [9], который при быстрой сходимости позволяют ограничить полную задачу на сингулярные числа (6) задачей отыскания единственного вектора  $\mathbf{u}_0$ .

Для оценки сравнительной эффективности методов был поставлен численный эксперимент, методика которого заключалась в следующем. Задавался тип антенного элемента, выбирались геометрия, размеры и число элементов антенной решётки, число отсчётов сигналов  $Q$ . Для каждого антенного элемента генерировались  $Q$  отсчётов сигнала. Сигналы на элементах отличались друг от друга только временем задержки относительно опорного элемента, которое вычислялось по заданным углам прихода плоской волны  $\alpha_0$  и  $\beta_0$ . Отсчёты сигналов подвергались дискретному преобразованию Фурье, в результате чего получалась матрица незашумлённого сигнала  $\mathbf{S}_0$ . Для каждого элемента независимо генерировались  $Q$  отчётов гауссовского шума с заданной дисперсией, которые также подвергались дискретному преобразованию Фурье. В результате получалась спектральная матрица шума  $\mathbf{H}$ . Результирующая матрица сигнала находилась сложением матриц  $\mathbf{S}_0$  и  $\mathbf{H}$ . Входное отношение сигнал/шум  $q_0$  вычислялось как отношение суммарной энергии сигнала к суммарной энергии шума на всех антеннах в полосе частот сигнала по формуле

$$q_0 = tr(\mathbf{S}_0 \mathbf{S}_0^+) / tr(\mathbf{H} \mathbf{H}^+).$$

Для сравнительной эффективности методов требовалось найти отклонения найденных различными методами оценок АФР  $\boldsymbol{\xi}$  от истинного АФР  $\boldsymbol{\xi}_0$ . Для этого использовалась невязка

$$\delta = \|\boldsymbol{\xi}_0 - \boldsymbol{\xi}\|,$$

где  $\gamma$  – комплексный множитель, введённый для согласования уровней  $\xi$  и  $\xi_0$ . Минимизация по  $\gamma$  приводит к следующему выражению для  $\delta$ :

$$\delta = \|\xi_0\|^2 \left( 1 - \frac{|\xi_0^+ \xi|^2}{\|\xi_0\|^2 \|\xi\|^2} \right). \quad (7)$$

Как видно из формулы (7), величина  $\delta$  может служить оценкой энергии шума, вносимого в АФР шумом в каналах приёма, который определяется матрицей  $\mathbf{H}$ . Тогда выходное отношение сигнал/шум  $q_\xi$  для АФР можно определить соотношением

$$q_\xi = \|\xi_0\|^2 / \delta = \left( 1 - \frac{|\xi_0^+ \xi|^2}{\|\xi_0\|^2 \|\xi\|^2} \right)^{-1}.$$

Численный эксперимент проводился для эквидистантной круговой решётки из вертикальных вибраторов с параметрами  $M = 12$ ,  $r = \lambda$ , где  $\lambda$  – длина волны. Конфигурация решётки показана на рис. 1. Диаграмма направленности антенного элемента  $G(\alpha, \beta) = \cos(\beta)$ . Для моделирования использовался шумоподобный сигнал с полосой частот 10 МГц, пример амплитудного спектра которого приведён на рис. 1. Для объёма выборки было выбрано значение  $Q = 1024$ .

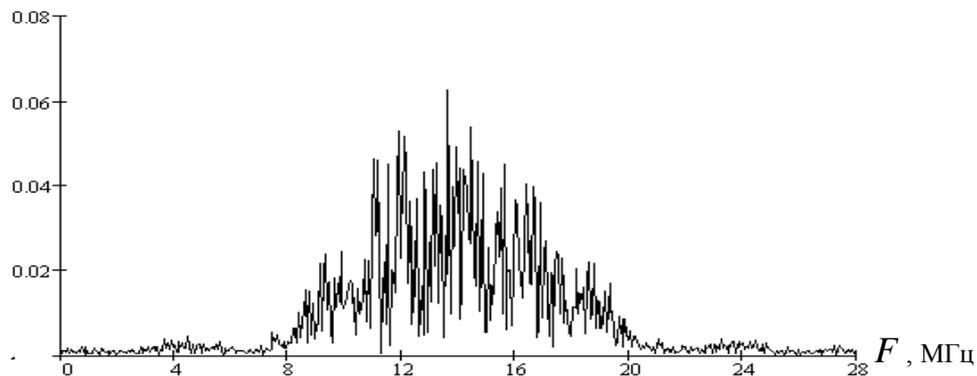


Рис. 1. Широкополосный сигнал. Полоса сигнала 10 МГц

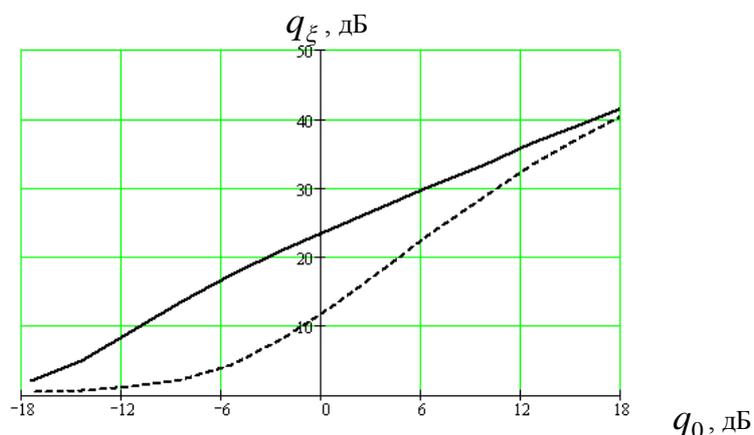
Для каждого из заданного набора значений дисперсии шума проводилось по 100 статистических испытаний. В каждом испытании выполнялись все операции, предписываемые каждым из методов оценивания АФР, и находились значения  $q_0$  и  $q_\xi$ , которые затем усреднялись.

Результаты численного эксперимента показаны на рис. 2, где приведены зависимости отношения сигнал/шум для АФР  $q_\xi$  от входного отношения сигнал/шум  $q_0$ . Из рисунка следует, что в актуальной области значений  $q_0 = -6 \div 12$  дБ метод собственных векторов превосходит метод когерентного усреднения не менее чем на 10 дБ. При очень больших и очень малых значениях  $q_0$  разница между ними исчезает.

При увеличении числа антенных элементов результаты практически не изменяются. При увеличении объёма выборки, т.е. времени накопления, сплошная линия на рис. 2 сдвигается вверх, т.е. выходное отношение сигнал/шум метода собственных векторов возрастает, причём рост составляет 3 дБ на октаву.

Может показаться, что вычислительная сложность метода собственных векторов существенно превышает сложность метода когерентного усреднения. В действительности это не так, поскольку для нахождения собственного вектора, соответствующего максимальному собственному значению, существует простой

итерационный метод, который при надлежащем выборе начального приближения сходится очень быстро.



**Рис. 2. Отношение сигнал/шум для АФР: сплошная линия – метод собственных векторов, пунктирная линия – метод когерентного усреднения**

На основании полученных результатов можно сделать вывод о том, что в пеленгаторах на основе многоэлементных антенных решёток для получения оценок амплитудно–фазового распределения широкополосных сигналов предпочтение следует отдать методу собственных векторов.

### Литература

1. Вертоградов Г.Г., Иванов Н.М., Шевченко В.Н. Многомерное обнаружение-различение сигналов и оценка их параметров // Сб. докл. 3-й междунар. конф. “Цифровая обработка сигналов и ее применение”. Москва, 29 ноября–1 декабря 2000. М.: Инсвязыздат, 2000. Т 1. С. 286.
2. Способ обнаружения и определения двумерного пеленга и частоты источников радиоизлучения: пат. 2190236 Рос. Федерация, № 2000123589; заявлено 13.09.2000; опубл. 27.09.2002, Бюл. № 27.
3. Шевченко В.Н. Непараметрический метод частотно-временной локализации энергии широкополосных сигналов в условиях априорной неопределенности // Автометрия. 2003. Т. 39, №1. С. 28.
4. Шевченко В.Н. Оптимизация частотно-временной локализации априорно неизвестных широкополосных сигналов // Автоматика и вычислительная техника. 2003. №2. С. 39.
5. Джонсон Д.Х. Применение методов спектрального оценивания к задачам определения угловых координат источников излучения // ТИИЭР. 1982. Т. 70, № 9. С. 126–139.
6. Ратынский М.В. Адаптация и сверхразрешение в антенных решетках. М.: Радио и связь. 2004. 384 с. ISBN 5-256-01698-9.
7. Марпл С.Л. (мл.). Цифровой спектральный анализ и его приложения. М.: «Мир». 1990. 265 с.
8. Беклемишев Д.В. Дополнительные главы линейной алгебры. М.: Наука. 1983. 335 с.
9. Иванов Н.М. Цифровая обработка сигналов в многоэлементных антенных решётках. // Радиотехника и электроника. 2007. Т. 52, №2. С. 159.
10. Ланкастер П. Теория матриц. М.: Наука, 1978. 282 с.