**К оценке спектра сигнала по его дискретным отсчетам.**

В.М. Разманов

*Институт Радиотехники и Электроники РАН, 141190, г.Фрязино, Московской обл., пл.Введенского д. 1,* razvlmi@ire.rssi.ru

*Оценка спектра сигнала сводится к решению уравнения Фредгольма первого рода. Показаны результаты использования метода регуляризации при определении рельефа морского дна в многолучевом эхолоте.*

*The estimation of a signal spectrum is reduced to the solving of Fredholm integral equation of the first kind. Are shown the results of using Tikhonov regularization method for sea bottom relief definition in multibeam system.*

Основной задачей при определении рельефа морского дна с помощью многоэлементной акустической системы является определение углового спектра (распределения по углу прихода) отраженных сигналов [1]. Определение же углового спектра сводится к задаче спектрального оценивания – определению спектра $F(\omega)$ временной функции $Z(t)$ по дискретному набору ее отсчетов $Z_n$, в общем случае при произвольных временах $t_n$

$$Z_n = Z(t_n) = \int F(\omega)\exp(i\omega t_n)d\omega \tag{1}$$

В многолучевом эхолоте частоте $\omega$ соответствует переменная $u = \sin\theta$, где $\theta$ - угол прихода, временам $t_n$ соответствуют расстояния приемных элементов линейной антенны в длинах волн $l_n/\lambda$, а $Z_n$ - сжатый принятый сигнал на отдельном элементе [1].

При непараметрическом оценивании спектр $F(\omega)$ логично находить из условия минимума среднеквадратичной ошибки - функционала $\Delta$, записываемого следующим образом:

$$\Delta_0 = \sum_n \left| z_n - \int F(\omega)\exp(i\omega t_n)d\omega \right|^2 ==\succ \min \tag{2}$$

Уравнение Эйлера для вариационной задачи (2) приводит к интегральному уравнению Фредгольма первого рода относительно искомого спектра $F(\omega)$

$$\sum_n Z_n \exp(-i\omega\cdot t_n) = \int F(\omega')K(\omega-\omega'))d\omega'; \tag{3}$$

с вырожденным ядром $K(\omega-\omega') = \sum_n \exp(-it_n(\omega-\omega'))$ зависящим от моментов времени $t_n$, а для линейной решетки это диаграмма направленности и определяется расположением приемных элементов антенной системы.

1. Для дискретного спектра $F(\omega) = \sum_m F_m\delta(\omega-\omega_m)$ модель измерений записывается в виде $Z_n = \sum_m F_m \exp(i\omega_m t_n)$. Непосредственное определение амплитуд $F_m$ и частот $\omega_m$ приводит к необходимости решения нелинейной системы уравнений. Соотношение (3) в этом случае превращается в задачу аппроксимации экспериментальной функции $\varphi(\omega)$ в виде $\varphi(\omega) = \sum_n Z_n \exp(-i\omega\cdot t_n) = \sum_m F_m K(\omega-\omega_m)$.

2. Интегральное уравнение (3) можно интерпретировать как готовый алгоритм обработки для оценки спектра $\tilde{F}(\omega)$ и соотношение для точности спектрального оценивания. Алгоритм обработки определяется левой частью как Фурье преобразование

$$\tilde{F}(\omega) = \sum_n Z_n \exp(-i\omega \cdot t_n),$$

правая часть указывает на связь между оценкой $\tilde{F}$ и истинным спектром

$$\tilde{F}(u) = \int F(u')K(u-u'))du'$$

в виде свертки точного решения с ядром интегрального уравнения. Вид этого ядра (диаграммы направленности для решетки) определяет спектральное разрешение. В предельном случае, когда $K(\omega-\omega') \Rightarrow \delta(\omega-\omega')$ оценка $\tilde{F}$ совпадает с точным решением $F$.

Нетрудно заметить, что алгоритмы оценок спектра, основанные на взвешивании входной последовательности $\tilde{Z}_n \Rightarrow Z_n h_n(\Omega)$ приводят в (3) к новому ядру

$K(\omega-\omega') \Rightarrow \tilde{K}(\omega-\omega')$, а следовательно и к другому разрешению. Путем соответствующего выбора $h_n$ можно, например, снизить уровень боковых лепестков.

3. Метод регуляризации Тихонова [2 ] позволяет перевести некорректную задачу решения однородного уравнению (3) в корректную задачу решения неоднородного уравнения и заключается в добавлении к среднеквадратичному условию (функционалу) $\Delta_0$ дополнительного регуляризующего члена $\Delta_R$, зависящего от искомого спектра $F(\omega)$.

Причем этот метод можно использовать как относительно непрерывной модели измерений (1), так и относительно его дискретного аналога $Z_n = \sum_m F_m \exp(it_n\omega_m)$.

В дискретной модели имеется N отсчетов входного сигнала $Z_n$, требуется найти M отсчетов спектра $F_m$, причем для улучшения разрешения требуется, чтобы выполнялось условие M > N. Значения моментов времени $t_n$ и частот $\omega_m$ произвольны, но фиксированы (заданы). Запишем соотношение (2) для определения спектра в виде

$$\Delta = \Delta_0 + \Delta_R = \Delta + \lambda_1\Delta_1[F] + \lambda_2\Delta_2[F]; \qquad (4)$$

где $\lambda_1$ и $\lambda_2$ - параметры регуляризации, а функционалы регуляризации выберем в виде

$$\Delta_1[F] = \int W_1(\omega)F(\omega)F^*(\omega)d\omega; \qquad \Delta_2[F] = \int W_2(\omega)F'(\omega)F'^*(\omega)d\omega$$

Здесь $W_1(\omega)$ и $W_2(\omega)$ - задаваемые весовые функции. Минимизация (4) соответствует и минимизации $\Delta_1$ - взвешенной энергии сигнала, при этом параметр $\lambda_1$ регулирует степень близости к дискретной модели, параметр $\lambda_2$ регулирует степень гладкости.

Уравнение Эйлера для вариационной задачи (4) приводит к следующему соотношению для спектра [3 ]

$$\int F(\omega')\sum_n \exp(i(\omega'-\omega)t_n)d\omega + \lambda_1 W_1 F - \lambda_2 \frac{d}{d\omega}(W_2 F') = \sum_n Z_n \exp(-i\omega t_n)$$

В случае $\lambda_2 = 0$ и $W_1 = \dfrac{1}{W}$ это соотношение принимает вид

$$W(\omega)\sum_n \exp(-\omega \cdot t_n)\left\{\int F(\omega')\exp(i(\omega' t_n)d\omega'\right\} + \lambda_1 F = W(\omega)\sum_n Z_n \exp(-i\omega \cdot t_n)$$

и решается стандартным способом [3]. Вводя вектор $C_n = \int F(\omega)\exp(i\omega \cdot t_n)d\omega$, получим

$$\lambda_1 F(\omega) = W(\omega)\sum_n (Z_n - C_n)\exp(-i\omega \cdot t_n) \qquad (5)$$

Коэффициенты $C_n$ находятся из решения линейной системы уравнений

$$(D + \lambda_1 I)\vec{C} = D\vec{Z} \qquad (6)$$

где матрица $D_{m,n} = \int W(\omega)\exp(i\omega(t_m - t_n)d\omega$ имеет размерность N, равную числу отсчетов входного сигнала. Матрица D – эрмитова для неэквидистантных отсчетов, в этом случае можно использовать алгоритм Холецкого [4]. Для эквидистантных отсчетов сигнала эта матрица еще и теплицева, в этом случае можно использовать быстрый реккурентный алгоритм решения теплицевых систем [4].

Для вычислений спектра в (5), (6) необходимо задать весовую функцию $W(\omega)$. Итерационный алгоритм спектрального оценивания высокого разрешения можно построить, если взять в качестве весовой функции энергетический спектр $|F(\omega)|^2$ в виде $W_{k+1}(\omega) = 1 + \sigma \cdot |F_k(\omega)|^2$ - на каждом шаге итерации весовая функция вычисляется по ранее вычисленному спектру, $\sigma$- параметр. Подобный алгоритм получается также при итерационном решении (4) для функционала регуляризации в виде

$\Delta_R = \lambda \int \ln(1 + \sigma |F(\omega)|^2) d\omega$ в дискретной модели [5,6].

В качестве примера на рис.1 (сверху) приведен пример изменения оценки спектра при увеличении числа итераций по такой схеме для тестовой комплексной последовательности из одной гармоники. Входная последовательность состоит из N=32 эквидистантных точек, выходная содержит M=512 точек спектра. На рис. 1 (снизу) показаны сравнительные оценки спектра той же последовательности, выполненные четырьмя способами: DFT - дискретное преобразованием Фурье, параметрическим авторегрессионным методом (метод Прони, m – число полюсов модели [4]) и итерационным методом регуляризации. Видно, что итерационный метод с использованием регуляризации дает наиболее узкий спектральный отклик.

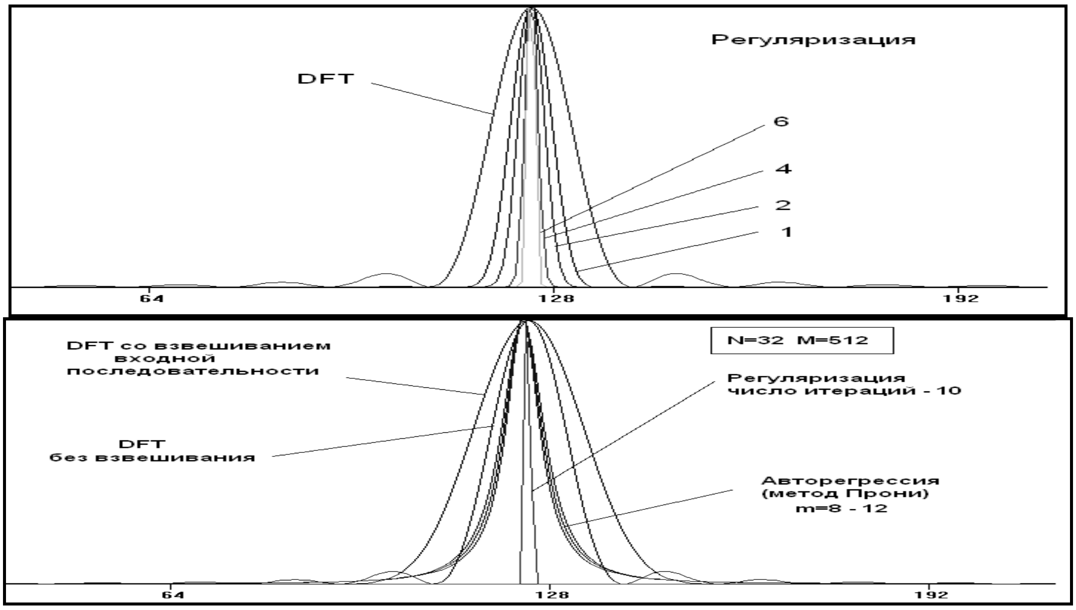
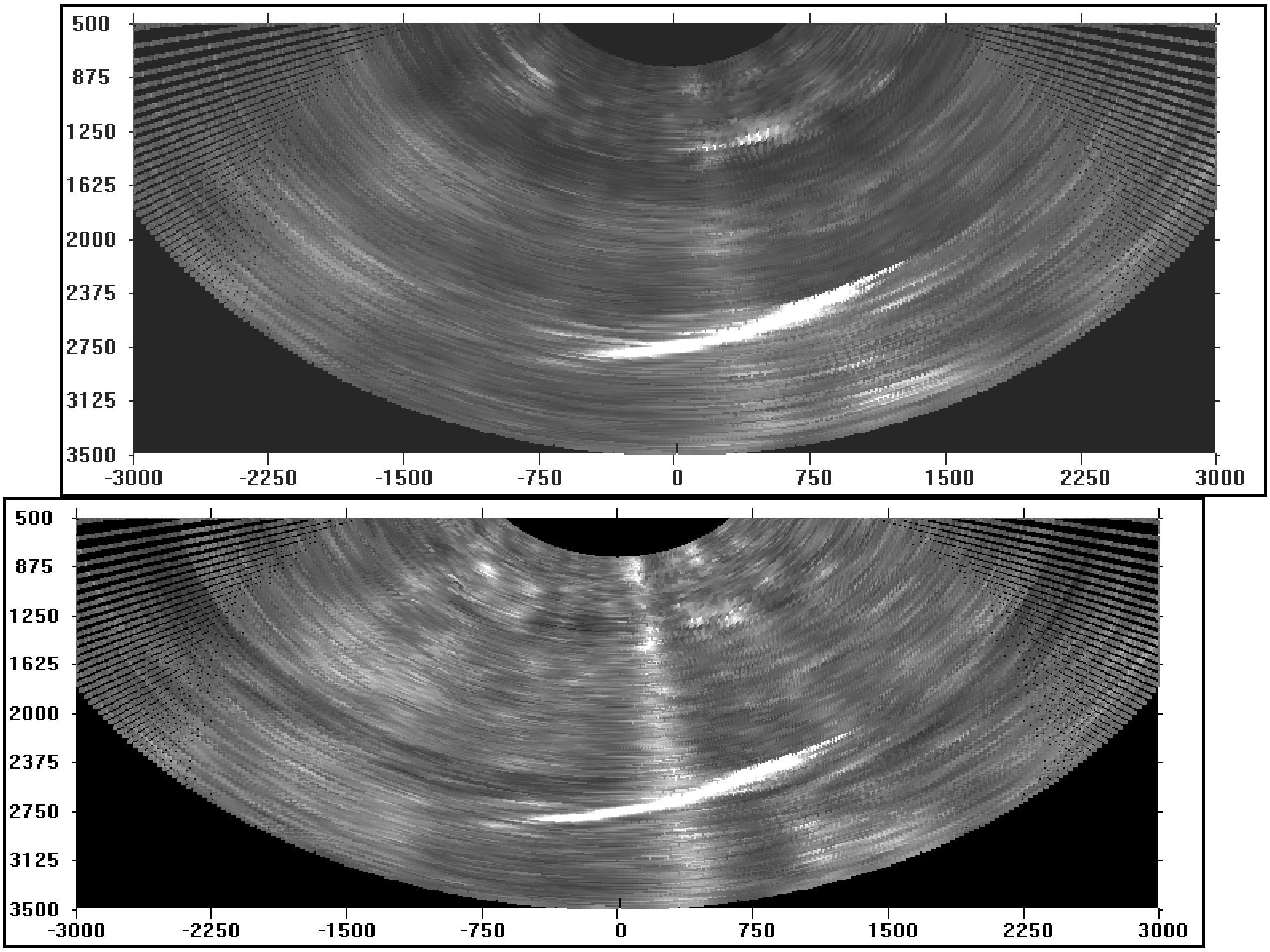



**Рис.1 Сверху- зависимость оценки спектра от числа итераций. Цифрами указано число итераций. Снизу - сравнительные оценки спектра экспоненциальной тестовой последовательности: ДПФ, метод авторегрессии, регуляризация.**

На рис.2 показаны сравнительные результаты применения методов спектрального оценивания при обработке данных многолучевого эхолота – системы, которая представляет собой 32 элементную решетку с расстоянием между элементами в половину длины волны, несущая частота 30 кГц. На рисунке представлена развертка амплитуды углового спектра в координатах глубина – горизонтальная дальность. По N=32 входным отсчетам на каждой дальности производилась оценка спектра в M=256 точек. При этом в плоскости бокового обзора формируется набор отдельных лучей с фиксированным наклоном относительно горизонтали. Верхний рисунок – применение дискретного преобразования Фурье с взвешиванием (N-32 отсчетов дополняются нулями до M и БПФ по M точек), в середине авторегрессионный метод Прони (расчет коэффициентов авторегрессии и вычисление спектра для M точек) и нижний рисунок – применение итерационного алгоритма с регуляризацией. Заметно более высокое угловое разрешение при итерационной регуляризации. К сожалению, высокое угловое разрешение достигается более сложными алгоритмами обработки, и, главное, за счет увеличения времени обработки.



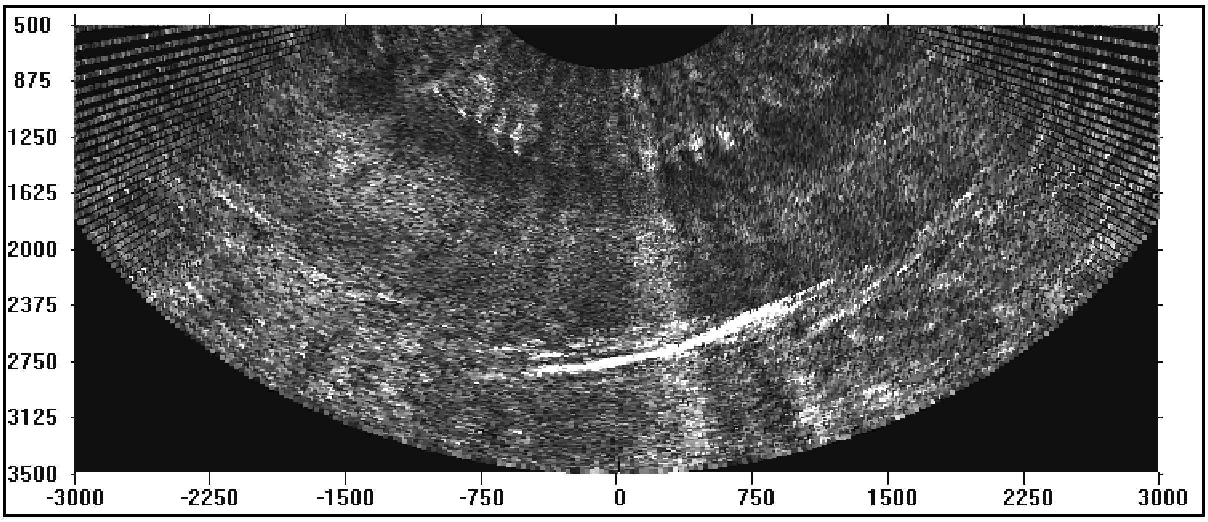



**Рис.2 Развертка углового спектра многолучевого 32 элементного эхолота. Сверху – дискретное преобразование Фурье, в середине – авторегрессионный метод Прони (число полюсов модели m=10), внизу – регуляризация (число итераций 10).**

**Литература**

1. В.И. Каевицер, В.М. Разманов, Дистанционное зондирование морского дна гидролокационными системами со сложными сигналами, УФН, 2009, т. 179, № 2, стр. 218-224.
2. Г.И. Василенко, Теория восстановления сигналов, Москва, Сов. радио, 1979.
3. А.П. Карташев, Б.Л. Рождественский, Обыкновенные дифференциальные уравнения и основы вариационного исчисления, Москва, “Наука”, Главная редакция физико-математической литературы, 1986.
4. С.Л. Марпл, Цифровой спектральный анализ и его приложения, Мир,1990.
5. M.D. Sacchi, T.J.Ulrych, C.J. Walker, Interpolation and Extrapolation Using a Hight-Resolution Discrete Fourier Transform, IEEE Transaction on Signal Processing, V. 46, No. 1, January 1998.
6. M.D. Sacchi, T.J.Ulrych, Estimation of the discrete Fourier transform, a linear inversion approach, Geophysics, V. 61, No. 4, (July – August 1996), pp. 1128-1136.