

Численное моделирование структуры электромагнитных полей в областях волновых катастроф при дистанционном зондировании сред

А.С. Крюковский¹, Д.С. Лукин², Д.В. Растягаев¹

¹ НОУ ВПО Российский новый университет,

² ГОУ ВПО Московский физико-технический институт (государственный университет)

В докладе рассмотрены особенности распространения радиоволн в ионосфере Земли.

The report describes the features of radio propagation in the Earth's ionosphere.

Введение

Актуальность проблемы изучения распространения электромагнитных волн в верхней и нижней атмосфере определяется необходимостью решения задач дальней радиосвязи, радионавигации, радиолокации, а также проблемами диагностики структуры среды распространения: тропосферы, ионосферы или магнитосферы.

Изучение распространения волн в реальной тропосфере и ионосфере Земли сопряжено с известными трудностями решения дифференциальных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами. Число задач, для которых найдено точное решение, невелико, и они, естественно, не охватывают всего многообразия реальных характеристик неоднородных сред, представляющих непосредственный интерес для практического исследования. Применение приближенных (асимптотических) методов волновой теории, с одной стороны, и численных методов с другой, позволяет значительно продвинуться в этой области.

Данная работа посвящена исследованию особенностей распространения радиоволн в ионосфере Земли, профили которой восстановлены научной группой под руководством профессора Куницына В.Е. на основе реальных наблюдений методом радиотомографии [1,2,3,4].

1 Лучевой подход и лучевые траектории

Лучевой метод занимает особое место среди других асимптотических методов по ряду причин, одна из них, и не последняя, заключается в его исключительной простоте и возможности получения аналитического решения для широкого круга задач, не поддающихся исследованию точными или другими асимптотическими исследованиями. Однако более пристальное рассмотрение вопроса позволяет заключить, что в большей части случаев такое решение является формальным в том смысле, что извлечение конкретных результатов требует применения численных методов расчета. Переход к лучевому приближению ещё не даёт решения уравнений Максвелла или волнового уравнения в общепринятом смысле этого слова, а представляет собой лишь сведение волновой задачи к решению более простых уравнений в отсутствие особых точек, например к уравнению эйконала, определяющему фазу волны, и к уравнению уравнениях переноса, определяющему амплитуду. Естественно, что получение аналитического выражения для поля в лучевом приближении, в первую очередь, предполагает возможность аналитического решения уравнения эйконала и определения траектории лучей.

Аналитическое решение уравнения эйконала и траектории лучей могут быть найдены, однако, для очень ограниченного числа задач, причем в большинстве случаев или существуют точные решения этих задач или, помимо геометрической оптики, возможно успешное применение других методов решения. При зависимости параметров среды более чем от одной координаты решение вообще не может быть

выражено даже при помощи квадратур, за исключением случая разделяющихся переменных, но в этих случаях переменные обычно разделяются и в исходных дифференциальных.

Проблема расчета траекторий в неоднородной среде может быть сведена к некоторому единому численному методу, связанному с решением уравнения эйконала методом характеристик. Известно, что метод характеристик позволяет находить решение уравнений в частных производных первого порядка, каким является уравнение эйконала, при помощи интегрирования характеристической системы обыкновенных дифференциальных уравнений, которая определяет траектории лучей и фазу вдоль них в неоднородной среде. Исключительная роль характеристик в построении асимптотических решений уравнений Максвелла позволяет перейти от численного расчета фазовой структуры поля к расчету различных асимптотических выражений для напряжённости поля в трёхмерно-неоднородной магнитоактивной среде. Для исследования влияния реальных тропосфер и ионосфер Земли на условия распространения радиоволн рассмотрим схему построения асимптотического решения уравнений Максвелла в неоднородной магнитоактивной среде.

При решении задачи построения траектории луча, гамильтонова бихарактеристическая система уравнений в неоднородной среде была получена Д.С. Лукиным в следующем виде [5]:

$$\frac{dk^p}{dt} = \frac{\partial \omega^2 \varepsilon}{\partial \mathcal{F}^p} \left(\frac{\partial \omega^2 \varepsilon}{\partial \omega} \right)^{-1}, \quad \frac{d\mathcal{F}^p}{dt} = \left(2c^2 k^p - \frac{\partial \omega^2 \varepsilon}{\partial k^p} \right) \left(\frac{\partial \omega^2 \varepsilon}{\partial \omega} \right)^{-1} \quad (1)$$

где $\mathcal{F} = (x, y, z)$ – координаты точки наблюдения, $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)$ – волновой вектор, ω – круговая рабочая частота излучения, c – скорость света, t – параметр вдоль лучевой траектории, $\varepsilon = \varepsilon(\mathcal{F}, \mathbf{k}, \omega)$ – эффективная диэлектрическая проницаемость среды распространения.

В работе рассмотрены две модели эффективной диэлектрической проницаемости среды:

- случай неоднородной изотропной ионосферы

$$\varepsilon = 1 - \nu \quad (2)$$

- и случай неоднородной анизотропной ионосферы [6]:

$$\varepsilon_{\pm} = 1 - \frac{2\nu(1-\nu)}{2(1-\nu) - u \sin^2 \alpha \pm \sqrt{u^2 \sin^2 \alpha + 4\nu(1-\nu)^2 \cos^2 \alpha}} \quad (3)$$

Обе модели учитывают частотную дисперсию среды распространения.

В формулах (2), (3) введены обозначения:

$$\nu = \frac{\omega_p^2}{\omega^2} = \frac{4\pi e^2 N}{m_e \omega^2}, \quad u = \frac{\omega_H^2}{\omega^2} = \frac{e^2 H_0^2}{m_e^2 c^2 \omega^2}, \quad (4)$$

где e – заряд электрона, m_e – масса электрона, H_0 – величина напряженности магнитного поля Земли, N – профиль электронной концентрации. В формуле (3) знак “+” соответствует обыкновенной волне, а знак “-” – необыкновенной волне. Параметр α – это угол между вектором напряженности магнитного поля Земли $\mathbf{H}_0 = (H_{0x}, H_{0y}, H_{0z})$ и волновым вектором. Поэтому выражение для косинуса угла имеет вид:

$$\cos \alpha = \frac{H_{0x} k_x + H_{0y} k_y + H_{0z} k_z}{H_0 |\mathbf{k}|}. \quad (5)$$

При решении бихарактеристической системы вычислялись координаты луча $\vec{r}(t)$ и волновой вектор $\vec{k}(t)$ как функции параметра t . Для вычисления бихарактеристик в анизотропной неоднородной диспергирующей ионосферной плазме применялись пакеты прикладных программ, поддерживающие символьные вычисления. Предполагалось, что источник излучения точечный, расположен в точке $\vec{r}(0) = (x_0, y_0, z_0)$, причем начальный волновой вектор $\vec{k}(0)$ параметрически зависит от углов выхода луча:

$$k_x(0) = \frac{\omega}{c} \cos \zeta \cos \eta, \quad k_y(0) = \frac{\omega}{c} \sin \zeta \cos \eta, \quad k_z(0) = \frac{\omega}{c} \sin \eta. \quad (6)$$

Предполагалась, что изначально распространение осуществляется в плоскости (x, z) . Что касается магнитного поля, то в расчетах его амплитуда предполагалась постоянной, а ориентация напряженности магнитного поля относительно локальной системы координат задавалась двумя углами ϑ и φ :

$$H_{0x} = H_0 \cos \gamma \cos \varphi, \quad H_{0y} = H_0 \cos \gamma \sin \varphi, \quad H_{0z} = H_0 \sin \gamma. \quad (7)$$

2 Моделирование распространения волн в двухслойной плазме

Рассмотрим результаты моделирования коротковолнового распространения в случае, когда профиль электронной концентрации ионосферной плазмы описывался двухслойной моделью с учетом горизонтальных градиентов, а так же локальных неоднородностей [7-10].

В качестве первой модели был выбран профиль электронной концентрации для двухслойной модели ионосферной плазмы. Форма профиля задается следующей формулой:

$$N(\vec{r}) = N_0 \left\{ \exp \frac{1}{2} \left[1 - \left(\frac{z - z_{01}}{z_{m1}/2} \right) - \sec \chi \exp \left(- \left(\frac{z - z_{01}}{z_{m1}/2} \right) \right) \right] + \beta \exp \left[- \left(\frac{z - z_{02}}{z_{m2}} \right)^2 \right] \right\}, \quad (8)$$

здесь z_{01} – высота максимума основного слоя F_2 , z_{m1} – условная полутолщина основного слоя F_2 , z_{02} – высота максимума нижнего слоя E , z_{m2} – условная полутолщина нижнего слоя E , b – безразмерный коэффициент, характеризующий степень ионизации нижнего слоя по отношению к основному, N_0 – электронная концентрация в максимуме основного слоя.

Приведем некоторые результаты моделирования для случая $b = 0,4$.

На рис. 1 приведена лучевая структура в плоскости (x, z) в случае распространения обыкновенной волны для вырожденного случая (однослойной ионосфере, модель Чепмена). В расчетах вектор напряженности магнитного поля находится в плоскости (x, y) , $\vartheta = \rho/4$.

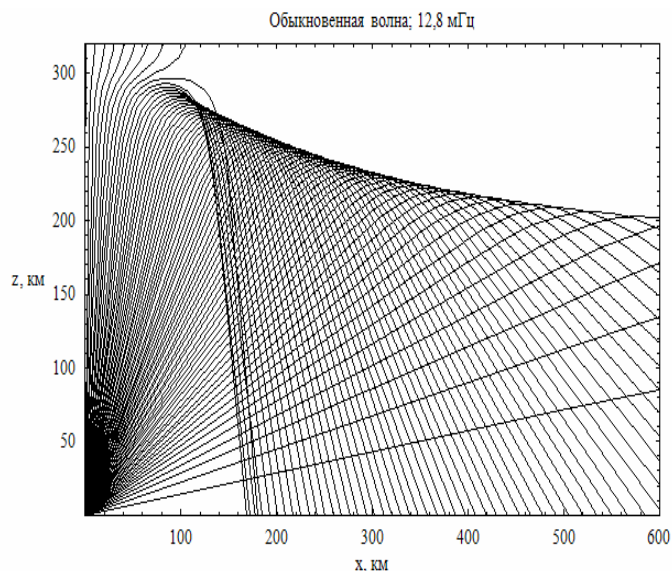


Рис. 1. Распространение обыкновенной волны в однослойной ионосфере

Поскольку плазменная частота слоя ($f_p = \omega_p / (2\pi) = 12,7$ МГц) несколько ниже рабочей частоты (12,8 МГц), часть лучей при углах падения, близких к вертикальному, проходят ионосферный слой, а остальные возвращаются на Землю и образуют каустическое острие. Лучевая структура, представленная на рис.1, характерна для распространения радиоволн как в изотропной, так и анизотропной среде.

На рис. 2 показана лучевая структура не только падающей волны, но и волн, отраженных от поверхности Земли (два раза). Это случай многоскачкового распространения. Видно, что отраженные волны образуют каустические структуры, аналогичные каустической структуре падающей волны.

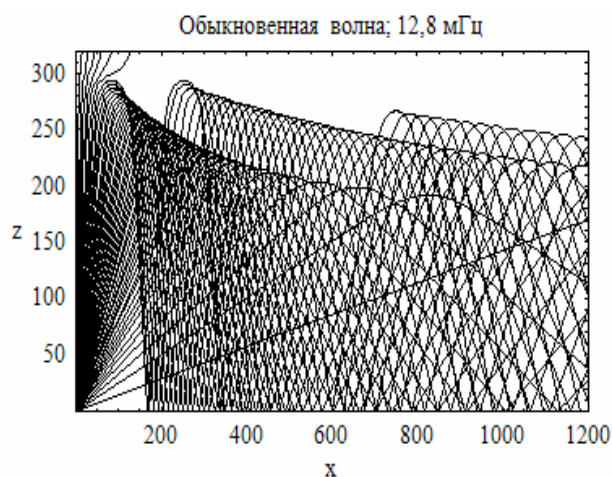


Рис. 2. Многоскачковое распространение для однослойной плазмы

На рис. 3 показан пример моделирования лучевого распространения необыкновенной волны в плоскости (x, z) (первый и второй скачки) уже в двухслойной ионосфере. Первые два каустических острия соответствуют первому скачку: верхнее каустическое острие образовано слоем F_2 , а второе – слоем E . Следующие каустические структуры образованы отраженными лучами. Представленные рисунки соответствуют известным результатам.

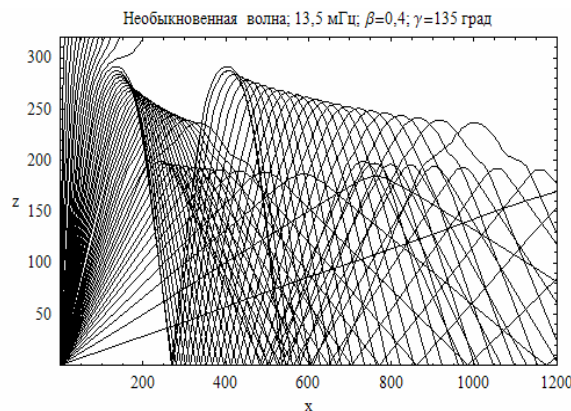


Рис. 3. Распространение необыкновенной волны в двухслойной ионосфере

Было выполнено моделирование распространения необыкновенной волны в случае, когда рабочая ($f = 13,5$ мГц) частота существенно превышает плазменную. Было показано следующее явление – лучи, проходящие сквозь ионосферный слой, отклоняясь на определенное расстояние, не возвращаются более в первоначальную плоскость, как это делают лучи, отраженные от ионосферы, причем, чем больше начальный угол между лучом и вертикалью, тем отклонение больше. Отраженные от ионосферы лучи в этой плоскости, в случае необыкновенной или обыкновенной волны, образуют каустическое острие.

На рис. 3 показана зависимость компоненты k_z волнового вектора от координаты x для первого скачка. Здесь особенно наглядно видно, как часть лучей проходит насквозь ионосферный слой, а часть отражается от него. При этом в плоскости (x, k_z) также образуются каустики. Необходимо отметить, что сам волновой вектор в ходе распространения не выходит из первоначальной плоскости, то есть для всех лучей $k_y = 0$, что вполне понятно, поскольку в анизотропной среде волновой вектор и нормаль к волновому фронту не совпадают.

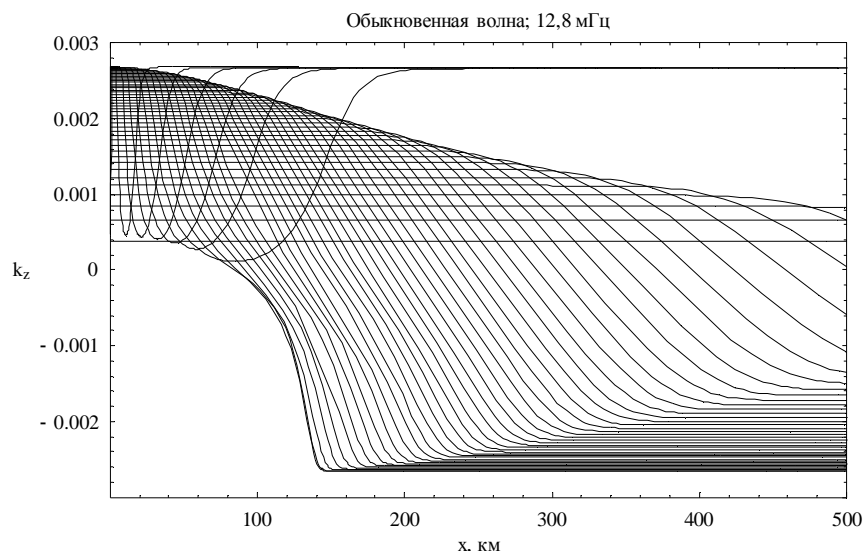
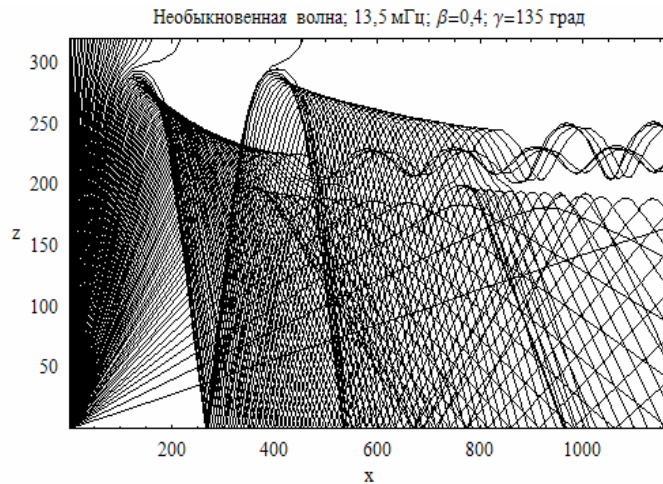
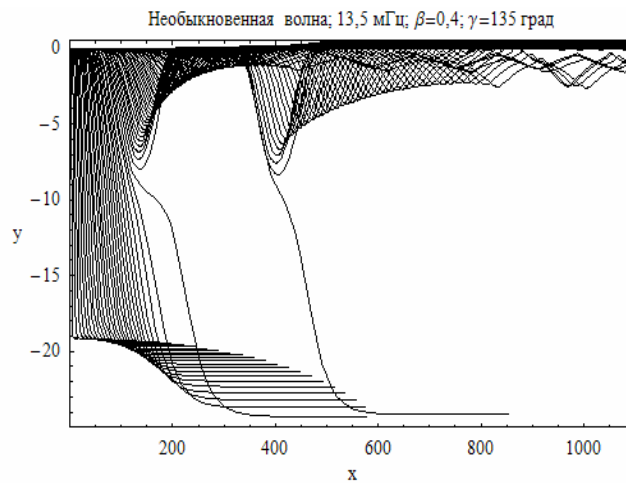


Рис. 4. Зависимость компоненты k_z волнового вектора от координаты

На рис. 4 рассмотрен случай проникновения необыкновенной электромагнитной волны в межслоевой волновой канал и распространения в нем. На рисунке 4а показана проекция в плоскости выхода волны вдоль поверхности Земли, на рисунке 4б – проекция на земную поверхность перпендикулярно плоскости выхода луча.



(а)



(б)

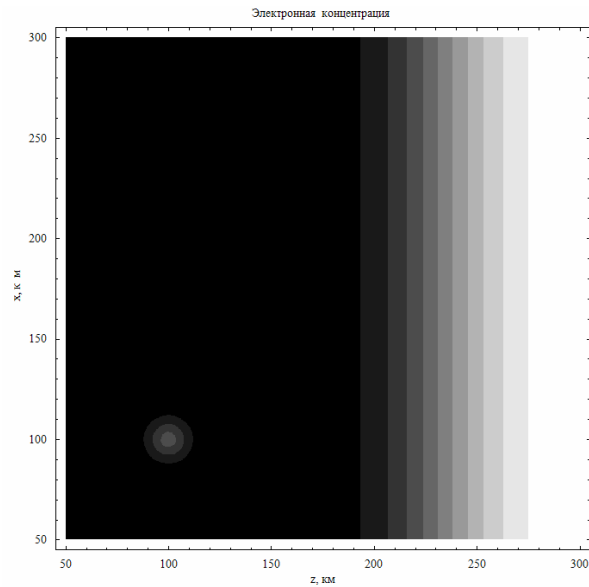
Рис. 4. Проникновение волны в межслоевой волновой канал

Приведем теперь результаты моделирования при распространении радиоволн в ионосфере в присутствии локальной неоднородности:

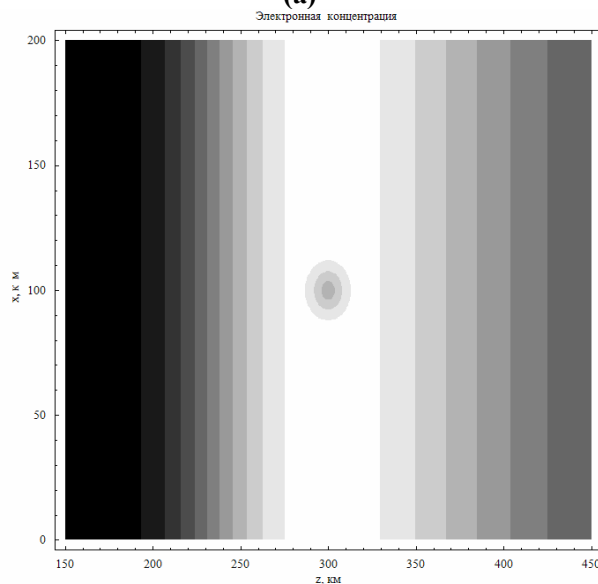
$$N(\beta) = N_0 \left\{ \exp \frac{1}{2} \left[1 - \left(\frac{z - z_{01}}{z_{m1} / 2} \right) - \sec \chi \exp \left(- \left(\frac{z - z_{01}}{z_{m1} / 2} \right) \right) \right] + F(x, y, z) \right\}, \quad (9)$$

где

$$F(x, y, z) = \beta_{loc} \exp \left[- \left(\left(\frac{x - x_{loc}}{x_{m3}} \right)^2 + \left(\frac{y - y_{loc}}{y_{m3}} \right)^2 + \left(\frac{z - z_{loc}}{z_{m3}} \right)^2 \right) \right]. \quad (10)$$



(а)

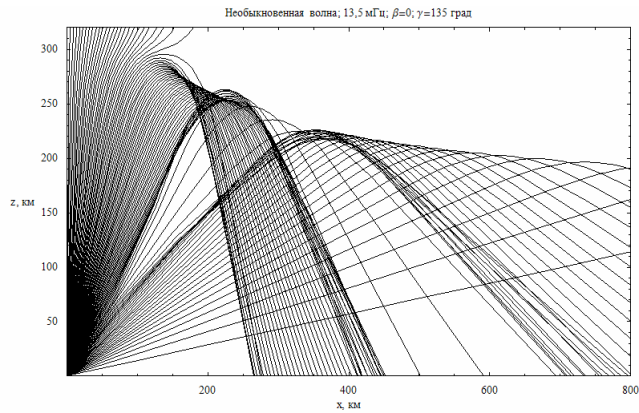


(б)

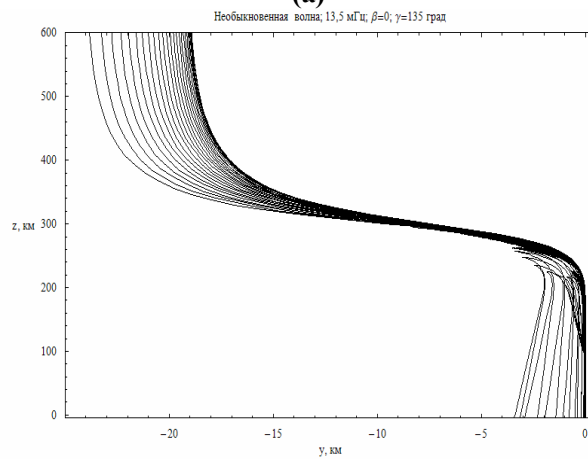
Рис. 5. Распределение электронной концентрации при наличии неоднородности

На рисунке представлено распределение электронной концентрации при наличии неоднородности в двух рассмотренных случаях. Рисунок 5 а – неоднородность вне слоя, рисунок 5 б – неоднородность на уровне максимума.

Пусть размеры неоднородности незначительные: $x_{m3} = y_{m3} = z_{m3} = 10 \text{ км}$. Сначала рассмотрим случай, когда область повышенной электронной концентрации лежит вне слоя (рис. 26): $x_{loc} = z_{loc} = 100 \text{ км}$, $y_{loc} = 0$, $\beta_{loc} = 0,3$. Тогда неоднородность выталкивает лучи из области распространения, и на Земле возникают области с пониженной напряженностью электромагнитного поля (см. рис. 6). Рисунок 6а показывает распространение лучей в плоскости выхода луча, рисунок 6б - иллюстрирует выход луча из плоскости распространения.



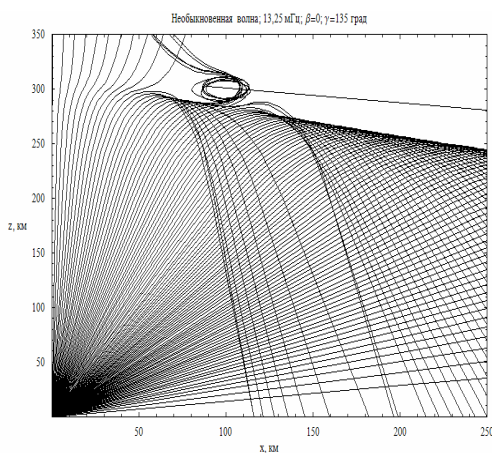
(а)



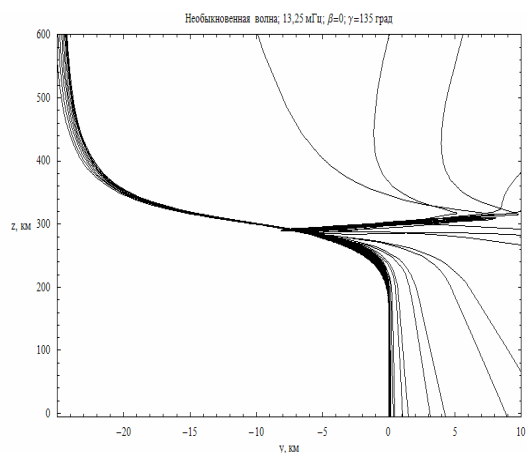
(б)

Рис. 6. Распространение лучей необыкновенной волны при наличии неоднородности вне слоя

При возникновении локальной области пониженной электронной концентрации на высоте максимума слоя: $x_{loc} = 100 \text{ км}$, $z_{loc} = 300 \text{ км}$, $y_{loc} = 0$, $\beta_{loc} = -0,3$. Моделирование лучевых траекторий показывает (рис. 7а), что неоднородность заставляет луч огибать себя несколько раз, что естественно. На рис. 7и и показаны проекции лучевых семейств на плоскость (x,y) . Лучи отклоняются в отрицательную область значений y , так как угол $\vartheta = 3\pi/4$.



(а)



(б)

Рис. 7. Распространение лучей необыкновенной волны при наличии неоднородности внутри слоя

Интересно отметить, в этом случае что луч не просто выходит из плоскости распространения (рис. 7б), но вращается в плоскости (x, y) (рис. 8).

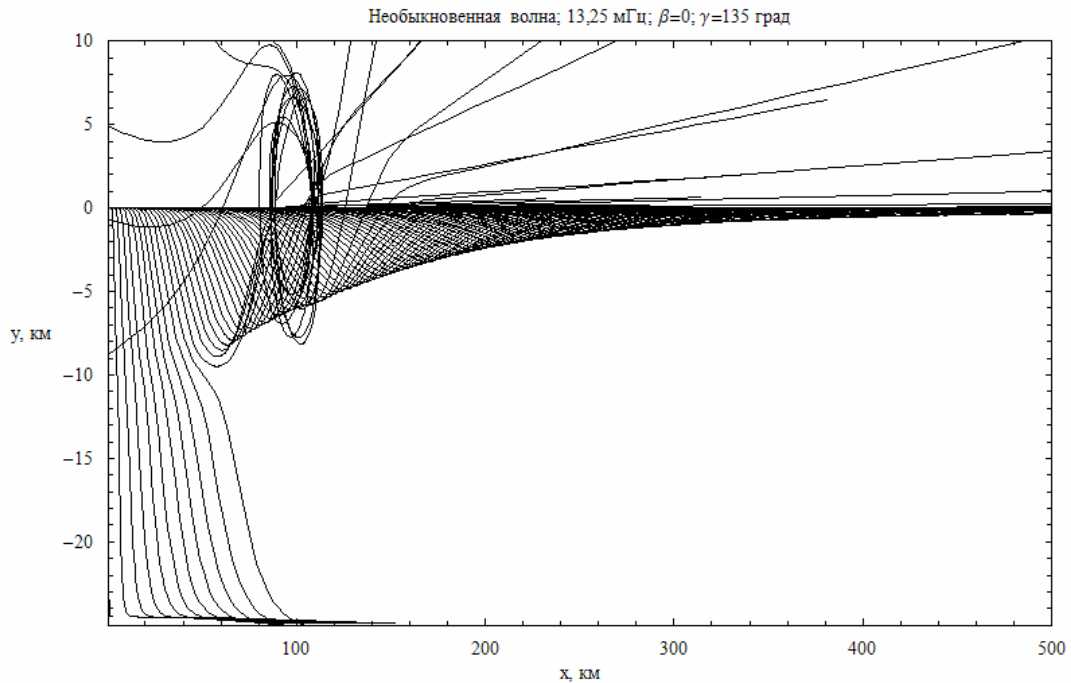


Рис. 8. Проекция лучевых траектории на плоскость (x,y) при наличие неоднородностей

3 Моделирование распространения волн при использовании интерполяционных моделей электронной концентрации

В настоящей работе мы рассматриваем лучевое распространение в случае, когда профили электронной концентрации построены нами в виде интерполяционных функций по данным, полученным в [1-4] методом радиотомографии (см. рис. 9). Рассматривается реконструкция E и F областей экваториальной аномалии вдоль меридиана ~121°E (восточной долготы).

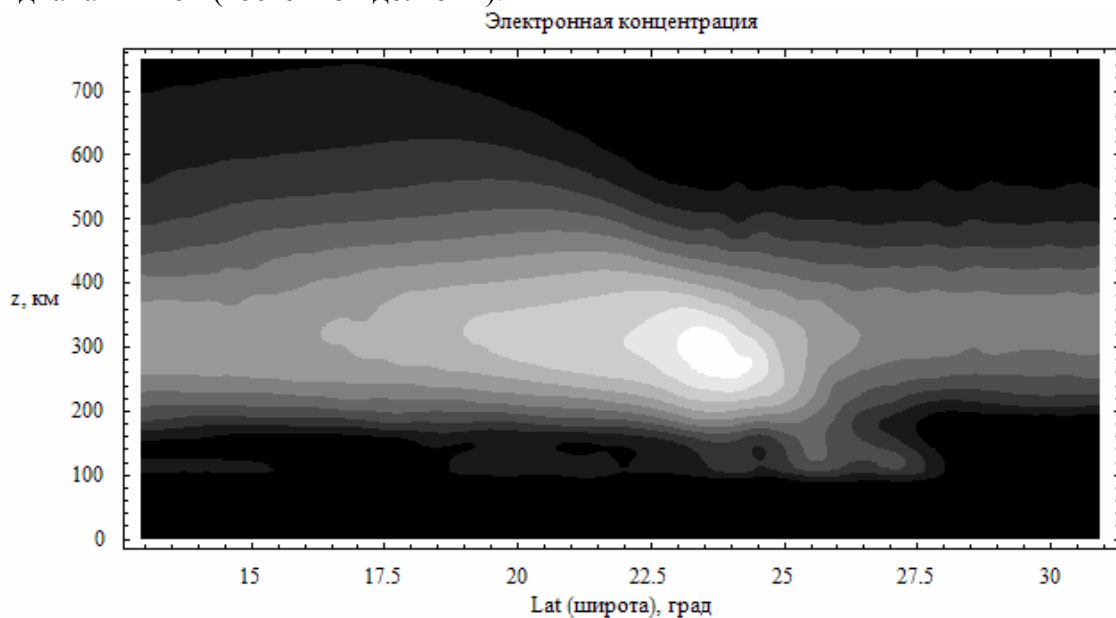


Рис. 9. Модель электронной концентрации

На рис. 9 представлены линии равного уровня электронной концентрации. Максимальное значение электронной концентрации $N_0 \gg 1,746 \cdot 10^{12}$ эл/м³. Рассмотрим некоторые результаты моделирования.

4 Лучевое распространение в изотропной среде

Сначала рассмотрим лучевое распространение в изотропной среде. На рис. 10 показано значение электронной концентрации непосредственно над источником. Рис. 10 а соответствует расположению источника на широте 21°, а рис. 10 б – широте 24°. Видно, что в первом случае слой Е ярко выражен, а во втором случае в районе слоя Е существует небольшой уступ.

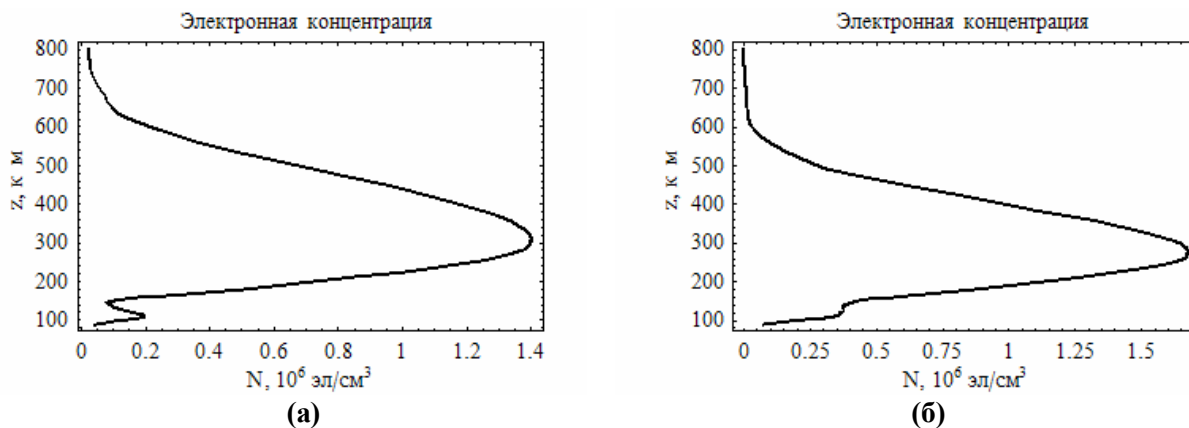
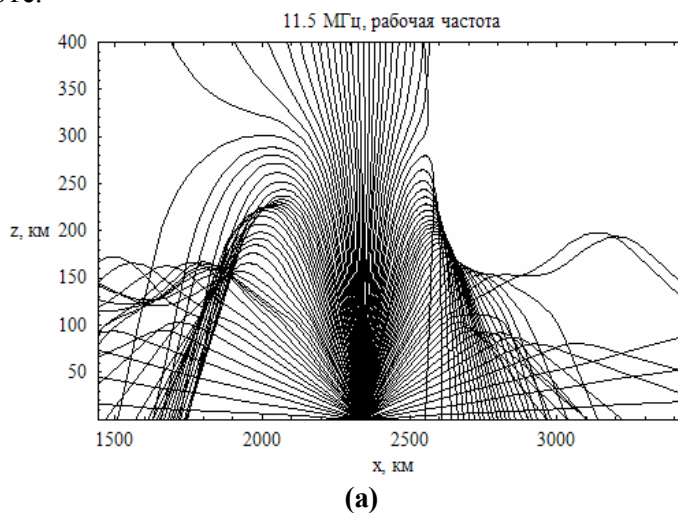
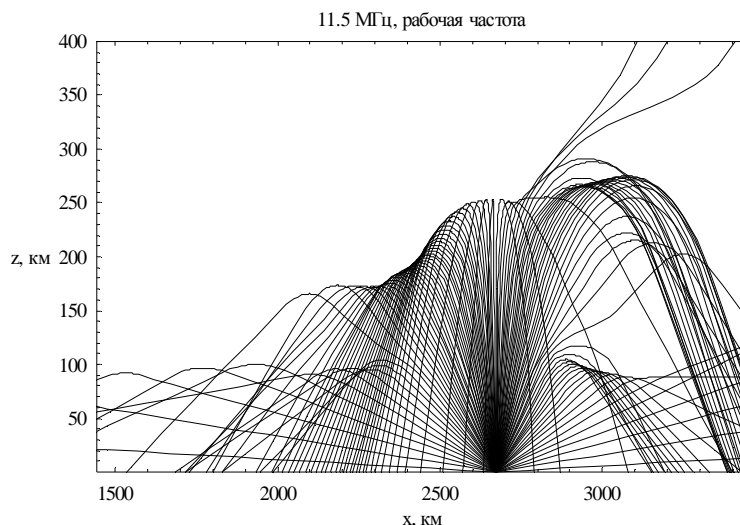


Рис. 10. Значение электронной концентрации над источником

На рис. 11 а и 11 б показаны лучевые структуры, соответствующие этим двум положениям источника излучения (расположенного на поверхности Земли) при одной и той же рабочей частоте.



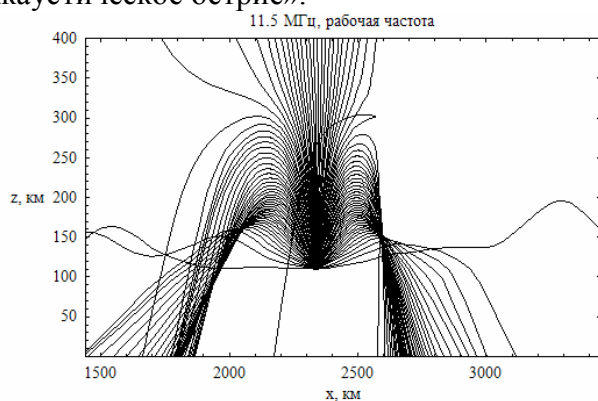


(б)

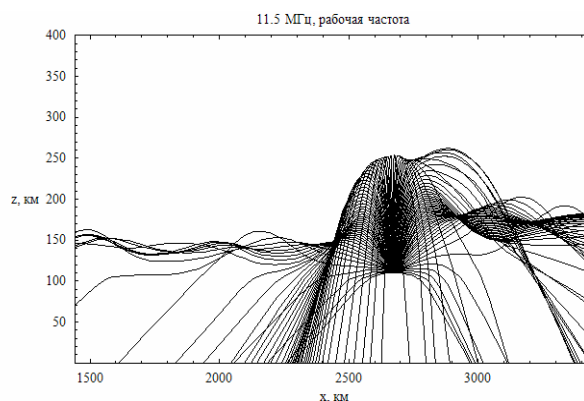
Рис. 11. Лучевые структуры для источников, расположенных на широте 21° и 24°

Видно, что когда источник излучения находится левее экваториальной аномалии (яркое пятно на рис. 9), большая часть энергии излучения проходит ионосферную плазму. Справа и слева возникает канализированное распространение на высотах слоя E.

Когда источник излучения находится несколько правее экваториальной аномалии, только незначительная часть лучей справа просачивается через ионосферную плазму. При этом канализированное распространение не возникает, но имеет место двух уровневое отражение: от слоя E и слоя F. В обоих случаях наблюдается сложная каустическая структура, образованная катастрофами типа «гладкая каустика» и «каустическое остриё».



(а)



(б)

Рис. 12. Лучевые структуры для источников, расположенных на широте 21° и 24° , высоте 110 км

На рис. 12 показана лучевая структура в случае, когда источник, излучающий в верхней полуплоскости, расположен на высоте 110 км и широте 21° и 24° (»2672,45 км от экватора) соответственно. Видно, как волна, отразившаяся от F слоя запитывает межслоевые каналы справа и слева на разных высотах. Справа и слева наблюдаются два каустических острия. На рис. 4 а хорошо видно как экваториальная аномалия экранирует распространение радио волн вправо. Сравнивая рис. 12 б и 11 б видим, что с увеличением высоты источника излучения исчезают волны, проходящие ионосферный слой.

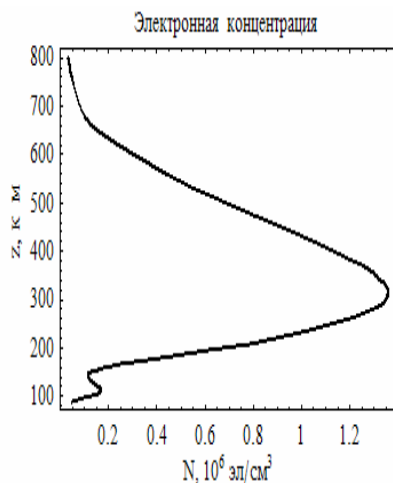


Рис. 13.

11 МГц, рабочая частота

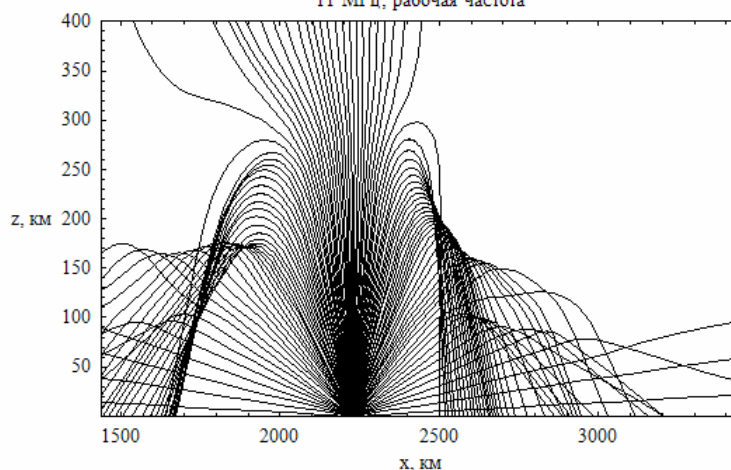


Рис. 14.

На рис. 14 показана лучевая структура в случае, когда источник расположен на Земле и на широте 20° . Профиль электронной концентрации над источником показан на рис. 13. В этой ситуации межслоевые каналы не запитываются. Справа и слева по-прежнему наблюдаются два каустических острья. Поскольку источник расположен дальше от экваториальной аномалии по сравнению с ситуацией, представленной на рис. 3 а, экранировка менее заметна, лучевая картина становится более симметричной.

На рис. 15 и 16 показаны лучевые структуры при более низких рабочих частотах: 9 и 7 МГц соответственно, причем источник излучения расположен, как и в предыдущем случае на Земле на широте 20° . На этих частотах лучи уже полностью отражаются от ионосферы. На частоте 9 МГц межслоевые каналы не образуются, а на частоте 7 МГц слева возникает захват лучей в межслоевой канал, а справа экваториальная аномалия успешно экранирует распространение радиоволн и их проникновение вглубь ионосферы.

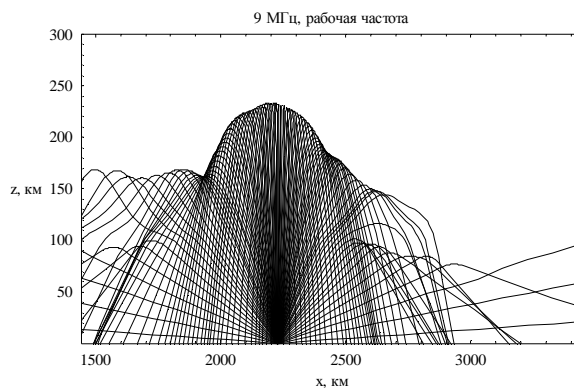


Рис. 15.

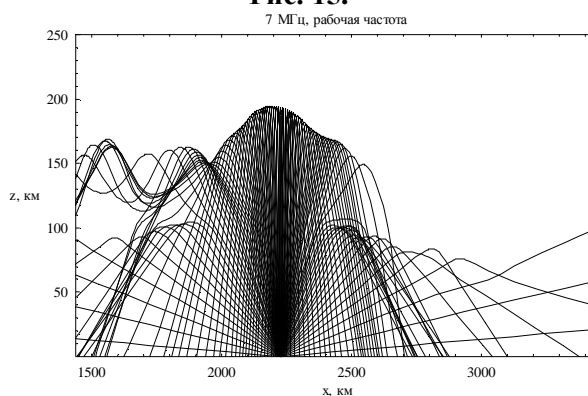


Рис. 16.

На рис. 17 и 18 показаны лучевые структуры при более низких рабочих частотах: 9 и 10 МГц в случае, когда источник излучения расположен на широте $17,5^\circ$. На рабочей частоте 9 МГц лучи полностью отражаются от ионосферы, на частоте 10 МГц значительная часть лучей ионосферу проходит. Справа экваториальная аномалия по-прежнему экранирует распространение радиоволн. Распространяются только те лучи, которые отражаются от нижней кромки ионосферы.

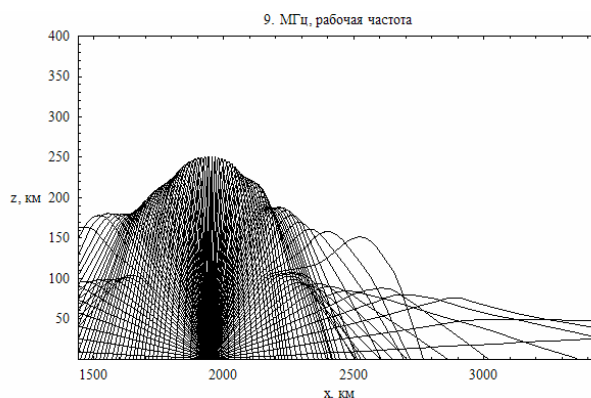


Рис. 17.

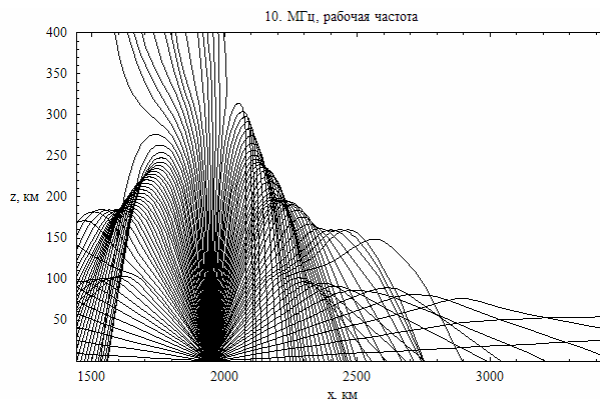


Рис. 18.

На рис. 20 показана лучевая структура в случае, когда источник излучения с рабочей частотой 9 МГц расположен справа от экваториальной аномалии на широте $27,5^\circ$. Здесь значительная часть лучей проходит ионосферу, причем хорошо видно как расположенная слева близко (по оси x) к источнику экваториальная аномалия отражает излучение и искривляет лучевые траектории. На рис. 19 показан профиль электронной концентрации над источником в этом случае.

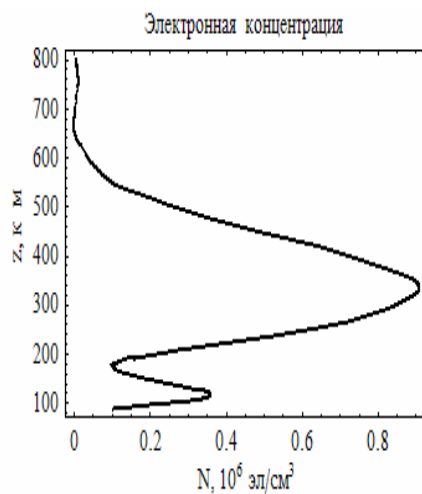


Рис. 19.

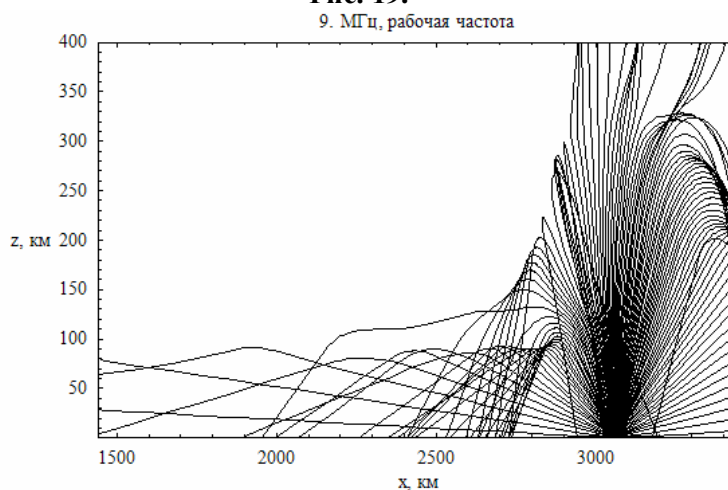


Рис. 20.

Наконец на рис. 22 показана лучевая структура в случае, когда источник излучения с рабочей частотой 12 МГц расположен точно под экваториальной аномалией на широте $23,75^\circ$. Наблюдается сложная многоуровневая лучевая и каустическая картины с зонами как повышенной так и пониженной напряженности поля.

На рис. 21 показан профиль электронной концентрации над источником. Межслоевая в этой зоне долина отсутствует.

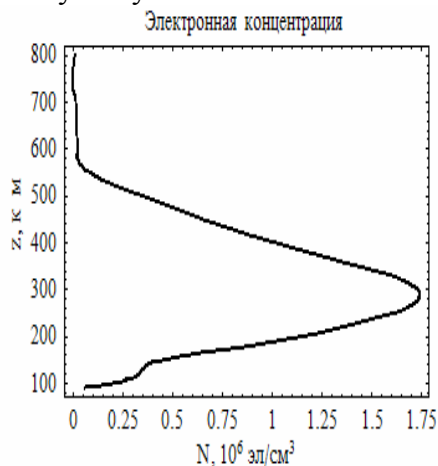


Рис. 21.

12. МГц, рабочая частота

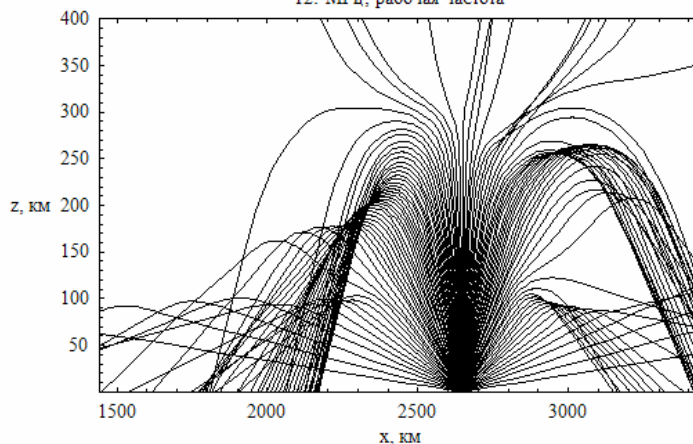


Рис. 22.

5 Лучевое распространение в анизотропной среде

Теперь рассмотрим лучевое распространение в анизотропной плазме, когда диэлектрическая проницаемость среды описывается формулой (3). Учитывая географическое положение области ионосферы, относительно которой проводятся расчеты, следует считать, что $H_0=0,42 \text{ Э}$, а в формулах (7) $j=0$, а $g=40^\circ$, то есть вектор напряженности магнитного поля лежит в плоскости меридиана, а следовательно и в плоскости распространения, если пользоваться обозначениями предыдущего раздела.

В этом случае луч не выходит из плоскости распространения. Однако траектории лучей для обыкновенной и необыкновенной волн будут различны.

На рис. 23 и 24 представлены лучевые структуры обыкновенной и необыкновенной волны излученной точечным источником, расположенным на поверхности Земли на широте 24° на частоте 11,5 МГц.

На представленных рисунках видно, что нижние лучевые и каустические структуры (до 150 км) для обыкновенной и необыкновенной волны качественно

совпадают, а верхние существенно различаются: необыкновенная волна в отличие от обыкновенной полностью отражается от ионосферы.

Лучевая структура, построенная без учета влияния магнитного поля более напоминает лучевую структуру обыкновенной волны, но отличия всё же присутствуют: для обыкновенной волны гораздо большая часть лучей проходит ионосферный слой.

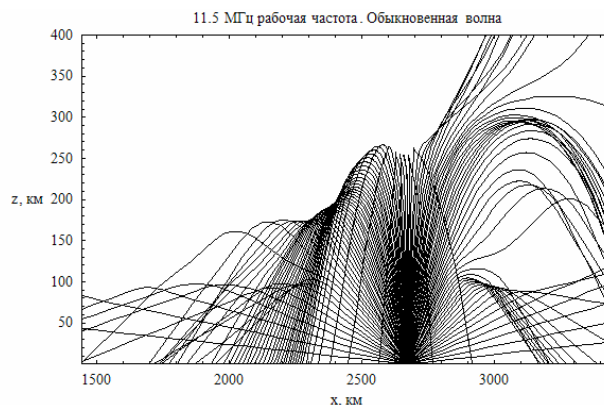


Рис. 23

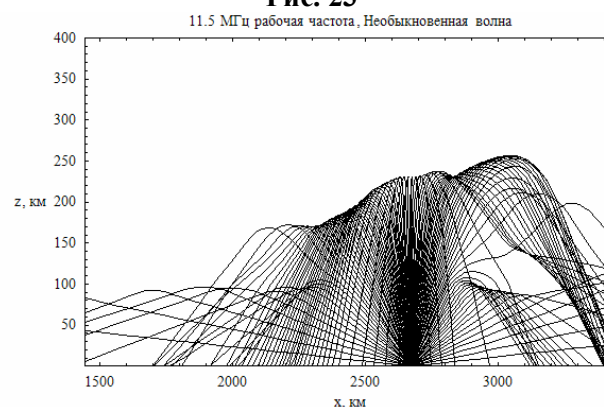


Рис. 24

Заключение

Авторы выражают глубокую благодарность профессору В.Е.Куницину и его коллеге Е.С. Андреевой за предоставленные данные, реконструирующие методами радиотомографии структуру ионосферной плазмы и ценные советы, а также д.ф.-м.н. А.П.Анютину за полезные замечания.

В работе рассмотрены однослойная и двухслойная модели, а также модель с горизонтальным градиентом, приводящую к возникновению межслоевого волнового канала. Рассмотрены частоты как выше, так и ниже критической (плазменной) частоты. Наиболее ярким эффектом, характеризующим именно анизотропные среды, является выход луча из плоскости распространения.

Работа выполнена при поддержке РФФИ гранты №№ 09-07-00189, 10-02-01103.

Литература

1. Куницин В.Е., Е.Д.Терещенко, Е.С.Андреева. Радиотомография ионосферы. М., Физматлит, 2007, 345 с.
2. Andreeva E.S., Franke S.J., Kunitsyn V.E., Yeh K.C. Some features of the Equatorial Anomaly revealed by Ionospheric Tomography, Geophysical Research Letters, Vol.27, No 16, P. 2465-2468, 2000.
3. Franke S.J., Yeh K.C., Andreeva E.S., Kunitsyn V.E. A study of the equatorial anomaly ionosphere using tomographic images, Radio Science, 2003, v. 38, No.1, p.1011-1020.

4. Kunitsyn V.E., Andreeva E.S., Franke S.J., Yeh K.C. Tomographic investigations of temporal variations of the ionospheric electron density and the implied fluxes // *Geophysical Research Letters*, 2003, V.30, No.16, 1851-1854.
5. Лукин Д.С., Спиридонов Ю.Г. Применение метода характеристик для численного решения задач распространения радиоволн в неоднородной и нелинейной среде. // *Радиотехника и электроника*, 1969. Т. 14. № 9. С. 1673–1677.
6. Лукин Д.С., Палкин Е.А. Численный канонический метод в задачах дифракции и распространения электромагнитных волн в неоднородных средах. М.: МФТИ, 1982. 159 с.
7. Крюковский А.С., Лукин Д.С., Растягаев Д.В. Моделирование каустических структур при распространении электромагнитных волн в неоднородной анизотропной плазме. // *Труды X международной научной конференции «Цивилизация знаний: глобальный кризис и инновационный выбор России»*, секция «Математическое и численное моделирование», Москва, 24-25 апреля 2009 г.– Часть I.– М.: РохНОУ, 2009.– С. 288–296.
8. Kryukovsky A.S., Lukin D. S., Rastyagaev D. V. Caustic Singularities Arising at Propagation of Short Radiowaves in Anisotropic Ionospheric Plasma [Электронный ресурс]: // *PIERS Proceedings*, August 18-21, Moscow RUSSIA, 2009. PP. 1998-2001. – Режим доступа <http://piers.mit.edu/piersproceedings/piers2k9MoscowProc.php>, свободный.
9. Крюковский А.С., Лукин Д.С., Растягаев Д.В. Исследование особенностей распространения коротких радиоволн в неоднородной анизотропной ионосфере. // *Электромагнитные волны и электронные системы*. 2009. Т.14. № 8. С. 17-26.
10. Крюковский А.С., Лукин Д.С., Растягаев Д.В. Математическое моделирование распространения радиоволн в анизотропной неоднородной ионосфере. // *Вестник Российского нового университета. Серия «Управление, вычислительная техника и информатика»* / М.: РохНОУ, 2009. Выпуск 2. С. 7-14.