

Корреляционные свойства уровня амплитуды волны при наклонном отражении от плоскостной случайно-неоднородной среды

А.Г. Вологдин, Л.И. Приходько*, И.А. Широков**

* Физический ф-т МГУ им. М.В. Ломоносова; Москва, Ленинские Горы
vologdin@phys.msu.ru; A19452008@yandex.ru

** Факультет ВМ и К МГУ им. М.В. Ломоносова; Москва, Ленинские Горы

Показано, что в рамках геометрической оптики наклонное падение волны на случайно-неоднородную изомерную среду с рефракцией приводит к анизотропии пространственных корреляционных свойств амплитуды волны.

It is was shown, that in approximation of the geometical optics the incline incidence of wave on the random inhomogeneous isomeric medium with refraction leads to the anisotropy of the spatial correlation properties of wave amplitude.

Характеристики волн, распространяющихся в природных (атмосфера, океан) случайно-неоднородных средах, испытывают флуктуации. В этих условиях допустимо приближение геометрической оптики (ГО), где имеют место два основных соотношения: уравнение эйконала и уравнение переноса, и можно перейти от волновой к лучевой трактовке. Если найдена траектория луча в неоднородной среде, то уравнения эйконала и переноса могут быть проинтегрированы вдоль этих траекторий.

При решении прямых и обратных задач теории распространения волн в случайно-неоднородных средах наибольшую трудность представляет нахождение статистических характеристик волн в средах с регулярной рефракцией и особенно при наличии полного внутреннего отражения. Примером таких сред являются неоднородные ионосферные слои при их радиозондировании.

В работах [1,2] на основе решения уравнения эйконала рассмотрены корреляционные свойства фазы плоской волны, углов прихода, группового пути и времени группового запаздывания сигнала при распространении в ионосфере. В этой работе рассмотрены флуктуации амплитуды волны при решении уравнения переноса.

Рассматривая уравнение переноса для скалярного поля и обозначая амплитуду волны – A , эйконал (фазовый путь волны) φ , введем, как принято в методе ГО, вместо амплитуды A уровень амплитуды $\chi = \ln A/A_0$, где A_0 амплитуда “невозмущенной” волны, то есть амплитуда волны при отсутствии флуктуаций в среде. Уравнения переноса дает возможность получить уравнение для уровня χ

$$2\nabla\varphi\nabla\chi + \Delta\varphi = 0.$$

В дальнейшем решении используем метод возмущений. Диэлектрическую проницаемость среды представим суммой регулярной и случайной составляющих

$$\varepsilon(\vec{r}) = \varepsilon_0(z) + \varepsilon_1(\vec{r}),$$

и считаем, что флуктуационная компонента $\varepsilon_1(\vec{r})$ мала по сравнению с регулярной, т. е. стандартное отклонение $\sigma_\varepsilon \ll \varepsilon_0(z)$. Тогда, рассматривая φ , χ в виде рядов по малому параметру ε_1 , и ограничиваясь первым приближением теории возмущений: $\varphi = \varphi_0 + \varphi_1$, $\chi = \chi_0 + \chi_1$, где φ_0 , χ_0 невозмущенные значения эйконала и уровня, можно [3] получить уравнения для невозмущенного значения χ_0 и для флуктуационной компоненты уровня χ_1

$$2\nabla\varphi_0\nabla\chi_0 + \Delta\varphi_0 = 0, \quad 2\nabla\varphi_0\nabla\chi_1 + 2\nabla\chi_0\nabla\varphi_1 + \Delta\varphi_1 = 0. \quad (1)$$

В уравнениях известными величинами являются φ_0, φ_1 на основе уравнения эйконала и χ_0 на основе первого уравнения (1). Тогда, учитывая соотношение

$$2\nabla\varphi_0\nabla\chi_1 = 2\sqrt{\varepsilon_0}\vec{S}_0\nabla\chi_1 = 2\sqrt{\varepsilon_0}\frac{d\chi_1}{d\sigma},$$

где $\vec{S}_0 = d\vec{r}_0/d\sigma$ – единичный вектор, касательный к невозмущенному лучу $k_0(\sigma)$, который одновременно является нормалью к фазовому фронту.

Решение второго уравнения (1) можно представить в виде

$$\chi_1 = -\frac{1}{2}\int_{\Sigma}\frac{2\nabla\varphi_1\nabla\chi_0 + \Delta\varphi_1}{\sqrt{\varepsilon_0}}d\sigma. \quad (2)$$

Интегрирование здесь ведется вдоль невозмущенной траектории луча Σ ($d\sigma$ – элемент длины луча), то есть под знак интеграла входят функции, зависящие от $k_0(\sigma)$.

Рассматриваем наклонное падение волны на ионосферу, средняя диэлектрическая проницаемость которой $\varepsilon_0 = 1 - z/z_1$, где z_1 – размер регулярного градиента.

При падении волны под углом ϑ_0 к оси z уравнение траектории невозмущенного луча в плоскости (z, x) , имеет вид параболы [1], [4], которую удобно записать в параметрическом виде

$$x(t) = \Delta(1+t) + x_a, \quad z(t) = z_m(1-t^2), \quad (3)$$

если ввести переменную

$$t = \mu\sqrt{\varepsilon_0 - \sin^2\vartheta_0}/\cos\vartheta_0 = \mu\sqrt{1 - z/z_m}, \quad z_m = z_1\cos^2\vartheta_0 \quad (4)$$

здесь верхний знак соответствует восходящей ветви траектории, нижний – нисходящей.

Расстояние между точками входа луча в среду x_a и выходом из нее x_b $2\Delta = 2z_1\sin 2\vartheta_0$. Из решения первого уравнения (1) для линейного слоя можно получить

$$\frac{d\chi_0}{dz} = \frac{1}{4z_1(\varepsilon_0 - \sin^2\vartheta_0)}. \quad (5)$$

Используя уравнение эйконала, можно найти флуктуационную компоненту эйконала

$$\varphi_1 = z_m\cos\vartheta_0\int_{-1}^{t_T}\varepsilon_1[x(t), y, z(t)]dt, \quad \varphi_1 = z_m\cos\vartheta_0\int_0^{t_T}\varepsilon_1[x(t), y, z(t)]dt, \quad (6)$$

здесь t_T – текущее значение параметра t , соответствующее произвольной точке траектории (3). Используя соотношения (3), (4), для флуктуаций уровня амплитуды в линейном слое вместо (2) можно записать

$$\chi_1 = -z_1\cos\vartheta_0\int_{-1}^{t_T}(2\nabla\chi_0\nabla\varphi_1 + \Delta\varphi_1)dt = i_1 + i_2 \quad (7)$$

для восходящей траектории луча (для нисходящей аналогично). Преобразуем (7), с учетом (5), (6). Тогда будем иметь для $i_1 = i(t_T)$ и $i_2 = i(t_T)$

$$i_1 = \frac{z_1}{2}\int_{-1}^{t_T}\left(\frac{1}{t_T} - \frac{1}{t_1}\right)\frac{\partial\varepsilon_1[x(t_1), y_1, z(t_1)]}{\partial z}dt_1, \quad i_2 = (z_1\cos\vartheta_0)^2\int_{-1}^{t_T}(t_T - t_1)\Delta\varepsilon_1[x(t_1), y_1, z(t_1)]dt_1. \quad (8)$$

Отсюда видно, что флуктуации уровня возрастают при $t_T \rightarrow 0$ ($z \rightarrow z_m = z_1\cos^2\vartheta_0$), т. е. при приближении луча к области отражения. Применимость соотношений (8) вблизи точки поворота луча требует анализа, который проведем в дальнейшем численно.

Исходя из соотношений (7), (8) и полагая, что при статистической изотропности функция автокорреляции диэлектрической проницаемости имеет вид гауссоиды с характерным масштабом a , найдем функцию автокорреляции χ_1 на уровне z :

$$B_\chi(\rho, \eta, z) = \frac{N^2}{4} \sigma_\varepsilon^2 \left[\frac{1}{2} \int_{-1}^{t_T} \left(\frac{1}{t_T} - \frac{1}{t_1} \right) dt_1 \int_{-1}^{t_T} \left(\frac{1}{t_T} - \frac{1}{t_2} \right) (1 - 2N_m^2 \tau_-^2 \tau_+^2) \exp\left(-\frac{r^2}{a^2}\right) dt_2 + N^2 \cos^4 \mathcal{G}_0 \times \right. \\ \left. \times \int_{-1}^{t_T} (t_T - t_1) dt_1 \int_{-1}^{t_T} (t_T - t_2) \left(15 - 20 \frac{r^2}{a^2} - 4 \frac{r^4}{a^4} \right) \exp\left(-\frac{r^2}{a^2}\right) dt_2 + \right. \\ \left. + \cos^4 \mathcal{G}_0 \int_{-1}^{t_T} \left(\frac{1}{t_T} - \frac{1}{t_1} \right) dt_1 \int_{-1}^{t_T} (t_T - t_2) (5 - 2 \frac{r^2}{a^2}) \tau_-^2 \tau_+^2 \exp\left(-\frac{r^2}{a^2}\right) dt_2 \right] \quad (9)$$

Здесь σ_ε^2 – дисперсия диэлектрической проницаемости и введены обозначения $\tau_- = t_2 - t_1, \tau_+ = (t_2 + t_1)/2, \rho = (x_{b2} - x_{b1})/a, \eta = (y_2 - y_1)/a, N = 2z_1/a, N_m = N \cos^2 \mathcal{G}_0$. Заметим, что параметры N и N_m представляют собой относительную удвоенную толщину линейного слоя для случая нормального и наклонного отражения, соответственно. В этих обозначениях отношение r^2/a^2 имеет вид

$$r^2/a^2 = (\rho + N_m t g \mathcal{G}_0 \tau_-)^2 + \eta^2 + N_m^2 \tau_-^2 \tau_+^2, \quad (10)$$

здесь r – расстояние между двумя точками соседних траекторий, описываемых (3).

Дальнейший анализ полученных аналитических решений для автокорреляционной функции (9) и дисперсии уровня амплитуды волны σ_χ^2 проведем численно для разных высот z , определяемых переменной t_T (6). Выберем параметры неоднородного ионосферного слоя: $z_1 = 100$ км, масштаб $a = 8$ км ($N = 25$) и $a = 5$ км ($N = 40$).

На рис. 1 даны относительные дисперсии уровня амплитуды $\sigma_\chi^2/\sigma_\varepsilon^2$. Зависимости построены для восходящей траектории луча как функции высоты z в области значений переменной $t = - (0,5 \div 0,03)$, что соответствует высотам $z = z_m(1 - t^2) = z_m(0,75 \div 0,9991)$ и для угла падения $\mathcal{G}_0 = 45^\circ$ ($z_m = 50$ км). Т. о., диапазон высот $z = (37,5 \div 49,995)$ км. Сплошная кривая соответствует $a = 8$ км, пунктирная $a = 5$ км. С увеличением z относительная дисперсия уровня возрастает, возрастание усиливается при $z \rightarrow z_m$, когда приближение ГО становится неприменимым.. Интенсивность флуктуаций для мелких неоднородностей больше, чем для крупных.

Для определения влияния области $z \approx z_m$ на интенсивность флуктуаций уровня численно оценивался вклад отдельных членов, входящих в (9), в суммарную относительную дисперсию, на разных высотах. Анализ показал, что исключение узкой области вблизи отражения, которая равна $\delta z = z_m - z_{\max} = z_m t_{\min}^2$ (например, для $N = 40, \mathcal{G}_0 = 45^\circ$ она составляет $\delta z \approx 20$ м) позволяет представить относительную дисперсию плоской волны выходе из ионосферного слоя в виде

$$\frac{\sigma_\chi^2}{\sigma_\varepsilon^2} = N^4 \cos^4 \mathcal{G}_0 \frac{1}{4} \left[\int_{-1}^{-t_{\min}} dt_1 (-t_{\min} - t_1) \int_{-1}^{-t_{\min}} (-t_{\min} - t_2) f_1 dt_2 + \int_{t_{\min}}^1 dt_1 (1 - t_1) \int_{t_{\min}}^1 (1 - t_2) f_1 dt_2 \right] +$$

$$+ \frac{N^2}{8} \left[\int_{-1}^{-t_{\min}} dt_1 \left(-\frac{1}{t_{\min}} - \frac{1}{t_1} \right)^{-t_{\min}} \int_{-1}^{-t_{\min}} \left(-\frac{1}{t_{\min}} - \frac{1}{t_2} \right) f_2 dt_2 + \int_{t_{\min}}^1 dt_1 \left(1 - \frac{1}{t_1} \right) \int_{t_{\min}}^1 \left(1 - \frac{1}{t_2} \right) f_2 dt_2 \right], \quad (11)$$

при $f_1 = (15 - 20r^2/a^2 + 4r^4/a^4) \exp(-r^2/a^2)$, $f_2 = (1 - 2N_m^2 \tau_-^2 \tau_+^2) \exp(-r^2/a^2)$. С использованием полученных выражений были численно проанализированы относительные дисперсии уровня амплитуды $\sigma_\chi^2 / \sigma_\varepsilon^2$ на выходе из ионосферного слоя, которые как функции угла падения представлены на рис. 2. Сплошные кривые и сплошные с квадратиками, вычисленные по двум разным критериям, соответствуют значению параметра $N = 25$ ($a = 8 \text{ км}$), для пунктирных кривых параметр $N = 40$ ($a = 5 \text{ км}$). Как видно из рисунка, дисперсии уровня на выходе из слоя монотонно убывают с увеличением угла падения, при этом кривые, построенные для разных значений N , существенно различаются между собой. Кроме того, представленные кривые позволяют сделать вывод о влиянии области отражения на флуктуации уровня амплитуды: дисперсии уровня для большей высоты z_{\max} при всех углах падения превышают соответствующие дисперсии, вычисленные при меньших z_{\max} .

Для оценки влияния регулярного градиента на дисперсию уровня амплитуды в случайно-неоднородной среде сравним величину относительной дисперсии $\sigma_\chi^2 / \sigma_\varepsilon^2$ на выходе из линейного слоя с соответствующим значением дисперсии при распространении плоской волны в однородном (в среднем) слое двойной толщины, формула для которой для статистически изотропных флуктуаций ε_1 получена в [3, 5]:

$$\sigma_\chi^2 = \frac{2}{3} \sqrt{\pi} \sigma_\varepsilon^2 \frac{L^3}{a^3} = \frac{2}{3} \sqrt{\pi} \sigma_\varepsilon^2 N^3,$$

где L – пройденный волной путь (здесь толщина двойного слоя). Используя эту формулу и сопоставляя с ней вычисленные нами значения дисперсии уровня амплитуды на выходе из слоя, можно найти, например, для $N=25$, $\vartheta_0 = 10^\circ$

$$\frac{\sigma_\chi^2(\varepsilon_0 = \varepsilon_0(z))}{\sigma_\chi^2(\varepsilon_0 = 1)} \approx \frac{13 \cdot 10^4}{1,84 \cdot 10^4} \approx 7$$

Таким образом, наличие регулярного градиента в среде и влияние области отражения приводит к существенному возрастанию амплитудных флуктуаций. Кроме того, из рис. 2 видно, что интенсивность флуктуаций уровня амплитуды возрастает при уменьшении размера неоднородностей. Это означает, что амплитудные флуктуации обусловлены в основном мелкомасштабной частью спектра диэлектрической проницаемости ε_1 , как отмечалось в [3] при рассмотрении рассеяния в однородной среде.

На рис. 3а ($N=25$), и 3б ($N=40$). изображены коэффициенты автокорреляции уровня амплитуды плоской волны $R_\chi = B_\chi / \sigma_\chi^2$ на выходе из линейного слоя, когда точки наблюдения разнесены по оси x в плоскости падения на расстояние ρ . Сплошная, пунктирная и штрихпунктирная кривые соответствуют углам падения $\vartheta_0 = 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$. Из рисунков следует, что коэффициент автокорреляции уровня наряду с положительными значениями принимает и отрицательные. Такое поведение коэффициента автокорреляции связано с законом сохранения энергии для флуктуационной компоненты уровня и подробно рассмотрено в [3]. Если радиус корреляции ρ_k определять по формуле $R_\chi(\rho_k) = 0$, то для представленных кривых

можно найти: $\rho_k = 1,55a, 2,05a, 2,75a$ для $N=25$, и $\rho_k = 1,75a, 2,35a, 3,05a$ для $N=40$ при тех же углах падения. Таким образом, радиус корреляции в плоскости падения увеличивается как с ростом угла падения, так и с уменьшением среднего масштаба случайных неоднородностей диэлектрической проницаемости.

Для случая, когда точки наблюдения разнесены по оси y (перпендикулярно плоскости падения) пространственный коэффициент автокорреляции уровня $R_\chi(0, \eta, z=0)$, как следует из выражения (9), практически определяется коэффициентом автокорреляции диэлектрической проницаемости.

Таким образом, полученные различия пространственных коэффициентов и радиусов автокорреляции флуктуаций уровня амплитуды в плоскости падения и перпендикулярно ей свидетельствует о том, что при рассеянии на изотропных неоднородностях диэлектрической проницаемости среды регулярная рефракция приводит к анизотропии флуктуаций амплитуды. При этом степень анизотропии зависит от угла падения волны на слой и размера случайных неоднородностей.

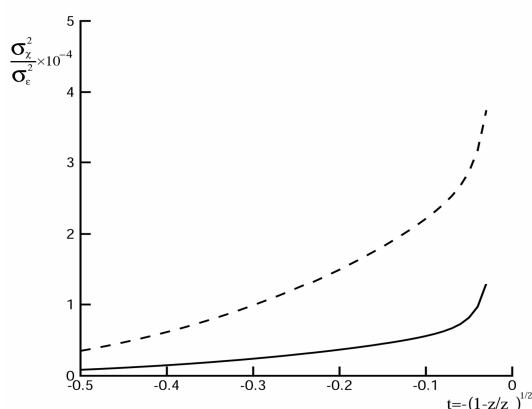


Рис. 1.

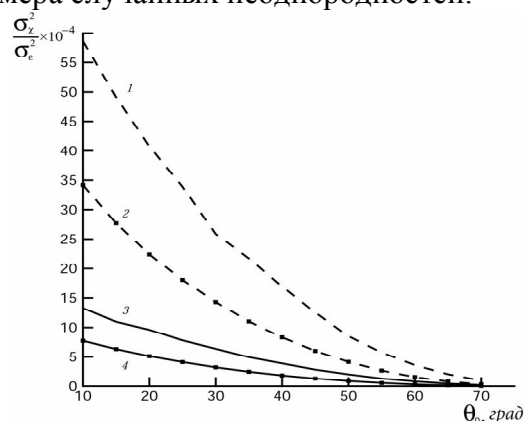
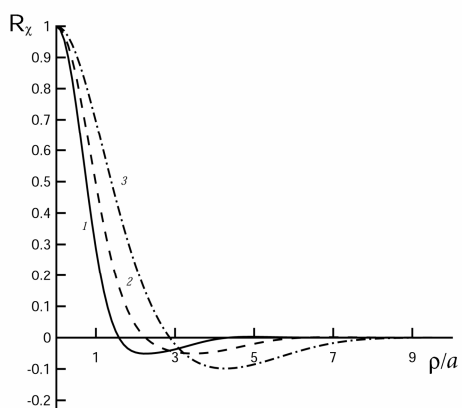
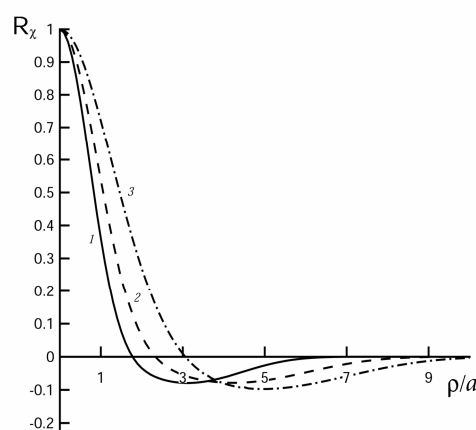


Рис. 2.



а)



б)

Рис. 3.

Литература

1. Вологдин А.Г., Приходько Л.И. //РЭ. 2004. Т. 49. № 10. С. 1218-1221.
2. Вологдин А.Г., Власова О.К., Приходько Л.И. //РЭ. 2007. Т. 52. №1. С. 1-5.
3. Рытов С.М., Кравцов Ю.А., Татарский В.И. Введение в статистическую радиофизику. Часть II. Случайные поля. М.: Наука, 1978.
4. Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухоруков А.П. Теория волн. М.: Наука, 1990.
5. Чернов Л.А. Волны в случайно-неоднородных средах. М.: Наука, 1977.