Разделение переменных для произвольной системы координат

Е.Г.Якубовский

Северо-Западный Государственный Заочный Технический Университет
191186, Санкт-Петербург Миллионная, д.5, E-mail Yakubovski@rambler.ru

Теорема 1. Представим угловую часть Лапласиана в виде

$$U = \exp(i\alpha\eta_1 + i\beta\eta_2)$$

где углы η_1, η_2 зависят от углов $\psi_l, l = 1,2$ и будут определены в ходе доказательства теоремы, причем в этих переменных тело имеет ортогональные углы η_1, η_2, α, β целые числа.

Доказательство.

Углы ψ_l определяются по формуле $\psi_l = \arg(x_3 + ix_l)$. Преобразование координат

$$\begin{cases} y_1(\psi_1,\psi_2) = x_1 / r(R,\psi_s) = \sin\psi_1 / \sqrt{1+\cos^2\psi_1 \tan^2\psi_2} \\ y_2(\psi_1,\psi_2) = x_2 / r(R,\psi_s) = \sin\psi_2 / \sqrt{1+\cos^2\psi_2 \tan^2\psi_1} \\ y_3(\psi_1,\psi_2) = x_3 / r(R,\psi_s) = \cos\psi_1 / \sqrt{1+\cos^2\psi_1 \tan^2\psi_2} = \\ = \cos\psi_2 / \sqrt{1+\cos^2\psi_2 \tan^2\psi_1} \end{cases}.$$

При этом оба выражения для величины x_3 равны по модулю и по знаку в силу определения углов. При этом угловая часть метрического ковариантного тензора имеет вид $g_{kl}(\psi_1,\psi_2), k,l = 1,2;$, величина g^{lm} контравариантный тензор относительно g_{kl}, т.е. $\sum_{l=1}^{3} g_{kl} g^{lm} = \delta_k^m, k,m = 1,2,3$ и δ_k^m символ Кронекера. Получаем зависимость для угловой части Лапласиана

$$\sum_{k,l=1}^{2} \frac{1}{\sqrt{g}} \{\frac{\partial}{\partial\psi_k}[\sqrt{g} g^{kl} \frac{\partial\Phi(\psi_1,\psi_2)}{\partial\psi_l}]\} + \delta^2\Phi(\psi_1,\psi_2) = 0 . \qquad (1)$$

При этом справедливо $\delta^2 = \alpha^2 + \beta^2$, где α, β целые числа. Покажем, как решается уравнение (1), для чего запишем член в внешней производной по величине ψ_1

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial\psi_1}[\sqrt{g} g^{11} \frac{\partial\Phi(\psi_1,\psi_2)}{\partial\psi_1} + \sqrt{g} g^{12} \frac{\partial\Phi(\psi_1,\psi_2)}{\partial\psi_2}] + \alpha^2\Phi = 0, \qquad (2)$$

Для этого введем функцию ς_1 из уравнения, являющегося первой частью формулы (2)

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial\psi_1} = \frac{\partial}{\partial\varsigma_1}, \qquad (3)$$

Уравнение (3) эквивалентно уравнению (полагаем, что оператор действует на функцию ς_1)

$$\frac{\partial\varsigma_1}{\partial\psi_1} = \sqrt{g}, \qquad (4)$$

Получим тоже соотношение другим способом. Дифференцируя произвольную функцию

$h[\varsigma_1(\psi_1,\psi_2)]$ по функции ψ_1, получим

$$\frac{\partial h[\varsigma_1(\psi_1,\psi_2)]}{\partial\psi_1}=\frac{\partial h[\varsigma_1(\psi_1,\psi_2)]}{\partial\varsigma_1}\frac{\partial\varsigma_1(\psi_1,\psi_2)}{\partial\psi_1}. \qquad (5)$$

Подставляя величину $h[\varsigma_1(\psi_1,\psi_2)]$ в оператор (3), получим

$$\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial h[\varsigma_1(\psi_1,\psi_2)]}{\partial\psi_1}=\frac{\partial h[\varsigma_1(\psi_1,\psi_2)]}{\partial\varsigma_1}, \qquad (6)$$

используя (5) из (6) получим (4). Уравнение (4) непосредственно интегрируем, откуда получим $\varsigma_1=\int\limits_{\psi_1^0}^{\psi_1}\sqrt{g(\psi_1,\psi_2)}d\psi_1$.

Запишем операторное уравнение, являющееся внутренней частью уравнения (2)

$$\sqrt{g}g^{11}\frac{\partial}{\partial\psi_1}+\sqrt{g}g^{12}\frac{\partial}{\partial\psi_2}=\frac{\partial}{\partial\varphi_1}, \qquad (7)$$

и допустим оператор (7) действует на функцию φ_1, откуда получим дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка (можно как и в первом преобразовании предположить, что оператор действует на функцию $h[\varphi_1(\psi_1,\psi_2)]$ и получить уравнение для сложной функции)

$$g^{11}\frac{\partial\varphi_1}{\partial\psi_1}+g^{12}\frac{\partial\varphi_1}{\partial\psi_2}=1/\sqrt{g}, \qquad (8)$$

Решая дифференциальное уравнение (8), откуда можно получить уравнение периодической поверхности $\varphi_1=\varphi_1(\psi_1,\psi_2)$. При этом уравнение (2) приобретает вид

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varsigma_1\partial\varphi_1}+\alpha^2\Phi=0,$$

которое имеет решение

$$\Phi=\exp[i\alpha(\varsigma_1+\varphi_1)]=\exp[i\alpha\eta_1(\psi_1,\psi_2)].$$

При этом имеем $\eta_1=\varsigma_1+\varphi_1$. Нормируем конечную величину $\eta_1(\psi_1,\psi_2)$, получим $\eta_1\in[0,2\pi]$. Аналогично строим величину $\eta_2(\psi_1,\psi_2)$. Уравнение (1) имеет вид в новых координатах

$$\frac{\partial^2 U}{\partial\eta_1^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial\eta_2^2}+(\alpha^2+\beta^2)U=0.$$

Построенные углы η_1,η_2 соответствуют ортогональным углам на торе, и в отличие от стандартной сферической системы координат являются периодическими.

Используя решение для радиальной зависимости решения уравнения Лапласа, $\mathrm{P}(R,\psi_l)=1/s_{\alpha\beta}[r(R,\psi_l)]^{1/2+\sqrt{\alpha^2+\beta^2+1/4}}$ и подставляя это решение в радиальную часть уравнения Лапласа, получим обыкновенное дифференциальное уравнение относительно $s_{\alpha\beta}[r(R,\psi_l)]$, причем начальные условия это радиус константа. Условию на бесконечности тоже можно удовлетворить.