Улучшение полиномиальных методов воспроизведения функциональных зависимостей.

В.В. Чекушкин, И.В. Пантелеев

Муромский институт Владимирского государственного университета (МИВлГУ)602264, г.Муром, Владимирская обл., ул.Орловская, 23, E – mail: ilya-panteleev@mail.ru

При воспроизведении функциональных зависимостей целесообразно производить оптимизацию методов аппроксимации методами компьютерного моделирования. Для сравнительного анализа при моделировании целесообразно использовать ряд Тейлора.

Разложение функции *sin(x)* в ряд Тейлора пятой степени имеет вид:

$$P1(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \qquad (1)$$

Точностная характеристика этого разложения представлена графиком на рисунке 1.

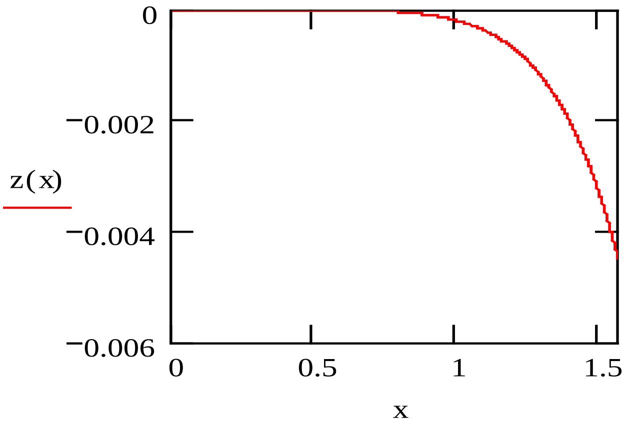

Рис.1 График абсолютной погрешности P1(x) на интервале от 0 до π/2.

Обеспечим воспроизведение функции *sin(x)* на интервале от 0 до π/2 интерполянтом вида:

$$P(x) = a_0 \cdot x - a_1 \cdot x^3 + a_2 \cdot x^5, \qquad (2)$$

с более высокими точностными характеристиками.

Точками интерполяции примем 0, π/6, π/3, π/2. Решив систему линейных алгебраических уравнений, найдем все коэффициенты a_i и уравнение примет вид:

$$P(x) = 0.99986 \cdot x - 0.165972 \cdot x^3 + 0.007601 \cdot x^5. \qquad (3)$$

Полином наилучшего приближения по обобщенной теореме Чебышева, такой, что все n+2 экстремальные значения погрешностей на интервале интерполяции $x \in [a,b]$ поочередно меняют знак и равны между собой по абсолютной величине. Такого результата можно добиться путем смещения точек интерполяции с последующим пересчетом коэффициентов полинома. Многократно проделывая эту операцию можно подобрать коэффициенты таким образом, что условие Чебышева будет выполняться. Разработан соответствующий метод поиска полинома наилучшего приближения. Подобранный таким образом полином имеет вид:

$$P3(x) = 0.0000556 + 0.9995559 \cdot x - 0.1655704 \cdot x^3 + 0.0074889 \cdot x^5 \qquad (4)$$

Как видно из формулы для реализации ее на микропроцессоре с аппаратным умножением необходимо будет выполнить 3 операции сложения и 9 операций умножения, если вынести общий множитель за скобки, то можно уменьшить количество операций умножения до 5.

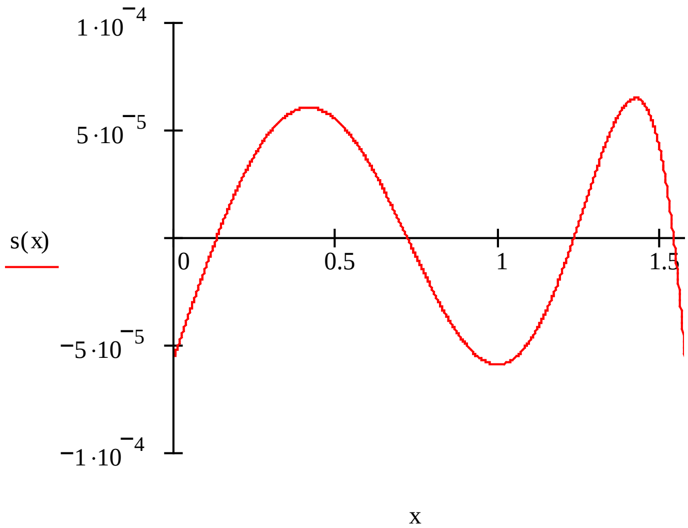

Рис.2 – график абсолютной погрешности P3(x).

При излишней точности можно упростить данную формулу, исключив задачу экстраполяции. Так как потеря нулевого члена вызовет рост погрешности, следует заново подкорректировать коэффициенты интерполянта или подкорректировать точки интерполяции и пересчитать все коэффициенты. В общем случае формула интерполянта принимает вид:

$$P4(x) = (0.999704 + (-0.165682 + 0.007517 \cdot x^2) \cdot x^2) \cdot x \qquad (5)$$

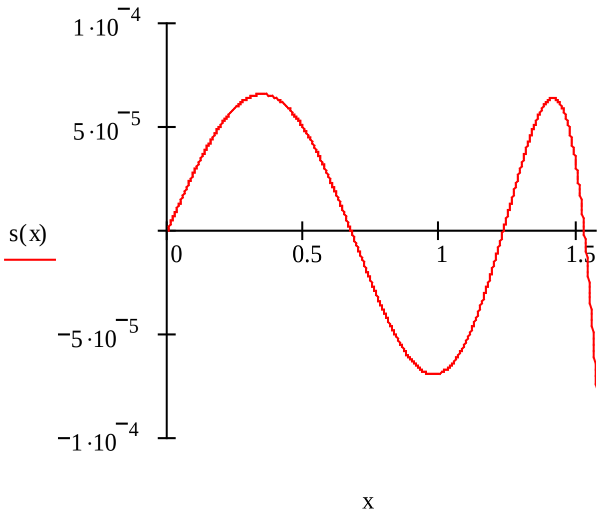

Рис.3 График абсолютной погрешности интерполянта P4(x).

Таким образом, можно добиться уменьшения погрешности, по сравнению с рядами Тейлора, в десятки раз, а на полиномах высших порядков и в сотни, тысячи раз.

Данный метод вычисления полиномов наилучшего приближения также можно применять для нахождения интерполянтов других функций.