

Специальные асимптотики функций Вебера – Эрмита и их применение в задачах распространения радиоволн

Е.А. Палкин, А.А. Петрович

Российский новый университет (РосНОУ), г. Москва, ул. Радио, д.22;
 Московский физико-технический институт (ГУ МФТИ), г.Долгопрудный М.О.,
 Институтский пер., д.9; palkin@rosnou.ru; anechka_petr@mail.ru

Предложены асимптотические разложения функций параболического цилиндра, аргументы которых содержат большой параметр как в экспоненциальном ядре, так и в предэкспоненциальном множителе интегранты. Рассмотрены различные области значений аргументов, при которых возникают особенности разных типов, прямым следствием которых является вид равномерных асимптотик и соответствующие им эффекты в задачах распространения радиоволн.

The uniform asymptotic expansions are proposed for the parabolic cylinder functions having integrand large parameter in exponential core and in preexponential coefficient. The different regions of arguments variations are considered when integral peculiarities appear resulting to the specific types of asymptotics, so as the corresponding effects in radio waves propagation problems.

Функции параболического цилиндра (функции Вебера-Эрмита) являются эталонным решением уравнения Гельмгольца для параболического профиля неоднородного показателя преломления:

$$\frac{d^2}{dx^2} \psi(x) + k^2 (1 - \alpha(a^2 - x^2)) \psi(x) = 0 \quad (1)$$

$$x \in [-a, +a]$$

Здесь α – параметр (масштаб) параболического слоя, k – волновое число (большой параметр). Интегральное представление решения (1) имеет вид:

$$\psi(x) = C * \exp\left(\frac{i}{2} k x^2 \sqrt{\alpha}\right) * \int_{\gamma} \exp\left\{ik \left(\frac{1}{4\sqrt{\alpha}} p^2 + px\right)\right\} * p^{\frac{k(1-\alpha a^2)}{2i\sqrt{\alpha}}} * p^{-1/2} dp. \quad (2)$$

При наличии большого параметра $k \gg 1$ для анализа и интерпретации решения можно построить асимптотические разложения решения (2), равномерные в различных областях значений аргументов α , x , и при различном выборе контура интегрирования γ . При этом основную роль играют асимптотики функции параболического цилиндра с большим параметром вида:

$$D_{\nu, \Lambda}(X) = \int_{\gamma^{\pm}} \exp\{i\Lambda(t^2 + tX + \nu \ln t)\} * t^{-1/2} dt, \quad (3)$$

где переменные X и ν связаны с параметрами интегральной формулы (2) соотношениями:

$$X = 2\alpha^{1/4} x; \quad \nu = -\left(\frac{1 - \alpha a^2}{2\sqrt{\alpha}}\right), \quad \Lambda = k \gg 1. \quad (4)$$

Представление функций параболического цилиндра в форме (3) явно выделяет специальный вид зависимости от большого параметра Λ и отличается от классических интегральных представлений формально лишь масштабированием переменной t (в комплексной плоскости контура γ^{\pm}) и, соответственно, переменных X и ν [1–3]. Однако, присутствие большого параметра во внеэкспоненциальной части интегрального представления (2), или, что эквивалентно, в логарифмическом члене

«фазовой функции», экспоненциального ядра интеграла (3) существенно отличает данное интегральное представление от других интегралов с большим параметром.

Согласно работам [4–7], структура равномерных асимптотических разложений определяется типом особенностей интегранты: вырожденные критические точки дают вклад, представляемый специальными функциями волновых катастроф, особенности типа точки ветвления или полюса внеэкспоненциального множителя порождают в асимптотических представлениях члены, содержащие специальные функции краевых катастроф (катастроф с ограничением) с полюсом, или точкой ветвления соответствующего порядка [5,7,8]. Что касается логарифмической особенности, то она также важна для корректного построения равномерных асимптотических разложений и приводит к необходимости введения специальных функций, содержащих эталонную логарифмическую особенность – это обобщенный интеграл Френеля или интеграл Бёмера [9].

В заданных областях параметров множество равномерных асимптотик интегральных представлений (2) и (3) включает различные типы специальных функции.

1) «Эталонная» функция Вебера:

$$D^{\pm}_\nu(X) = \int_{\gamma^{\pm}} \exp\{i(t^2 + tX + \nu \ln t)\} * t^{-1/2} dt, \quad (5)$$

контур γ^+ в (13) обходит точку логарифмической и корневой особенности «0» сверху, а γ^- – контур, соответствует обходу точки «0» снизу. Для выделения регулярной ветви логарифмической функции и функции квадратного корня в плоскости переменной t введен разрез от точки «0», не затрагивающий контур, а именно: от точки «0» по отрицательной части мнимой оси в случае обхода точки «0» сверху (контур γ^+), и в случае обхода снизу – по положительной части мнимой оси (контур γ^-). Выбор разреза, соответствующего контуру интегрирования, определяет те особые точки в комплексной плоскости переменной t , которые оказываются значимыми для построения асимптотических разложений интеграла (2).

2) Функции Эйри (и их производные):

$$Ai^{\pm}(X) = \int_{L^{\pm}} \exp\{i(\pm t^3 + tX)\} dt, \quad (6)$$

$$W_2(X) = \int_{L_2} \exp\{i(t^3 + tX)\} dt. \quad (7)$$

Здесь контуры интегрирования L^{\pm} заданы так: для знака «+» он начинается в секторе комплексной плоскости переменной t , определенном условием: $\frac{2}{3}\pi \leq \arg(t) \leq \pi$, и уходит на бесконечность в секторе комплексно плоскости, определенном условием: $0 \leq \arg(t) \leq \frac{1}{3}\pi$, для знака «-» контур симметричен описанному выше относительно действительной оси. Контур L_2 получается из контура L^+ поворотом на $-\frac{2}{3}\pi$ (по часовой стрелке). С точностью до коэффициента данные функции соответствуют принятым в литературе «функции Эйри» и второй функции Эйри (см., например, [10]).

3) Функция типа интеграла Бёмера-Френеля [9] (и также ее производная):

$$B^{\pm}(X) = \int_{L^{\pm}} \exp\{i(\pm t + X \ln t)\} * t^{-1/2} dt. \quad (8)$$

Здесь контур L^{\pm} для знака «+» проходит, огибая точку «0» снизу, по верхней части комплексной плоскости переменной t с разрезом от точки «0» вдоль положительной части мнимой оси, что обеспечивает выделение регулярных ветвей логарифмической и корневой функций и не затрагивает контур L^{\pm} ; для знака «-» в экспоненциальном ядре

контур L^\pm и разрез выбираются симметричными описанным выше относительно оси $\text{Re } t$.

Следуя теории равномерных асимптотических разложений интегралов с осциллирующим ядром, содержащим большой параметр, пространство переменных интеграла (2) разбивается на области с различным типом асимптотик. Поскольку «эталонная» функция Вебера (5) лишь масштабными преобразованиями (4) отличается от решения (2), удобно представить эти области в координатах $\{X, \nu\}$ (рис. 1).

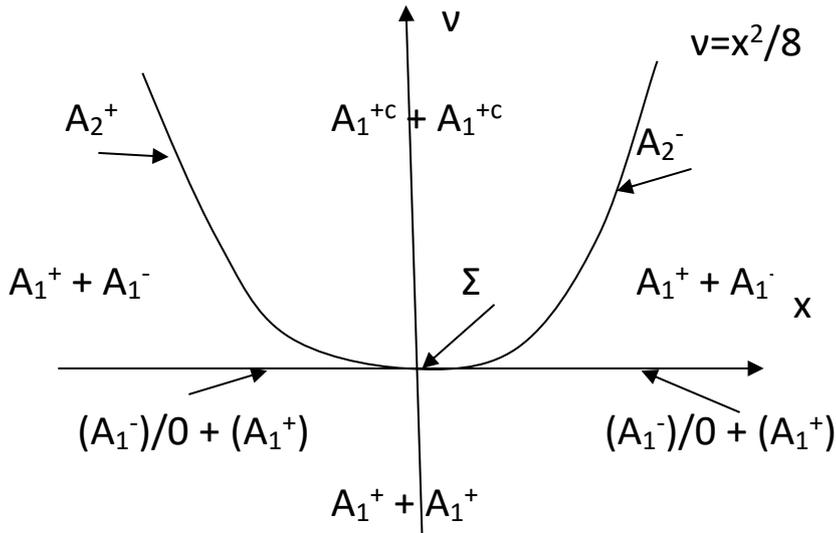


Рис. 1. Геометрия особенностей интеграла (2)

На основе анализа отмеченных на рисунке в различных областях типов взаимодействующих критических точек и их расположения относительно контура интегрирования позволяет предложить следующие формулы для равномерного асимптотического по Λ^{-1} описания рассматриваемого интеграла (2), (3).

I. Область вырожденной стационарной точки критической, особенность A^\pm_2 , возникает только при $\nu > 0$ и отвечает, в зависимости от выбора контура интегрирования, либо формированию простой каустики при отражении от параболического отражающего слоя, либо зоне формирования волны, просачивающейся через параболический отражающий слой (эффект подбарьерного просачивания):

$$D_{\nu,\Lambda}(X) \cong \exp(i\Theta_{A_2}) * \left\{ l_{1A_2} A^\pm i(\tilde{X}) + l_{2A_2} A^\pm i'(\tilde{X}) \right\} + \exp(i\Theta_P) \{ l_P \} \quad (8)$$

$$D_{\nu,\Lambda}(X) \cong \exp(i\Theta_{A_2}) * \left\{ l_{1A_2} W_2(\tilde{X}) + l_{2A_2} W_2'(\tilde{X}) \right\}$$

при этом в области особенности A^+_2 , при $X < 0$ и $\nu > 0$ (см. рис.1), в (8) следует брать функции Ai^+ и A^+i' для описания отражения от слоя, или функции W_2 и W_2' для описания эффекта просачивания, а в области особенности A^-_2 , соответственно, Ai^- и A^-i' или сопряженную вторую функцию Эйри и её производную. Добавочное слагаемое соответствует вкладу точки «0». Параметры разложения (8) зависят от параметров функции (3), в том числе и от большого параметра Λ .

II. Область особенности $A_1^-/0$, соответствующая эффекту надбарьерного отражения на критическом уровне слоя (в случае плазменного слоя на критической частоте):

$$D_{v,\lambda}(X) \cong \exp(i\Theta_{A/0}) * \left\{ l_{1A/0} B^\pm(\tilde{X}) + l_{2A/0} B^{\prime\pm}(\tilde{X}) \right\} + \exp(i\Theta_{A^+1}) \{l_{A1}\}, \quad (9)$$

при этом, знак интеграла Бёмера-Френеля противоположен знаку контура γ^\pm в (3).

III. Область $\nu < 0$ при любых X соответствует «слабому» параболическому барьеру и в зависимости от выбора контура γ^\pm , то есть выбора направления падающей волны, решение включает либо только член, соответствующий прошедшей волне, либо два члена, отвечающие падающей волне и отраженной вследствие надбарьерного отражения. Во всех случаях следует также учитывать вклад точки логарифмической и корневой особенности.

$$D_{v,\lambda}(X) \cong \exp(i\Theta_{1A^+1}) \{l_{1A^+1}\} + \exp(i\Theta_{2A^+1}) \{l_{2A^+1}\} + \exp(i\Theta_P) \{l_P\}. \quad (10)$$

При $X=0$ (в центре слоя) имеет место эффект Стокса, когда одна из седловых точек типа A_1^+ уходит с перевального контура (см. [11,12]), поэтому непосредственно в окрестности этой линии асимптотическое решение следует рассматривать в форме исходной функции (3), с использованием эталонной функции (5). Однако, вклад «исчезающей» седловой точки экспоненциально мал (надбарьерное отражение здесь только формируется).

IV. Область $\nu > 0$ при любых X , соответствует «сильному» параболическому барьеру. Поэтому вне окрестности особенности A_2^\pm асимптотика (3) содержит вклады либо двух седловых точек, соответствующих падающей и отраженной волнам, либо одной седловой точке, соответствующей волне, прошедшей слой в результате подбарьерного просачивания. Асимптотика (3), с учетом вклада точки «0» имеет форму (10).

Определение значений параметров предложенных форм асимптотических разложений проводится методами, описанными в [5 - 8], на основании анализа особых точек интеграла (3) и их положения относительно контура интегрирования. Следует отметить, что наличие многозначной логарифмической функции требует рассмотрения вкладов всех регулярных ветвей с выделением главных членов асимптотик. Физический смысл этих членов заключается в учете (или отбрасывании) вкладов волн, кратно отраженных от параболического слоя конечной толщины, в том числе кратных эффектов надбарьерного отражения и подбарьерного просачивания.

Литература

1. Абрамовиц М., Стиган И.. Справочник по специальным функциям. С формулами, графиками и математическими таблицами. – М.: Наука, 1979. – 830 с.
2. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. (7-е издание) – С.-П.: БХЗ-Петербург, 2011. – 1232 с.
3. Киселев О.М. Зоопарк чудовищ или знакомство со специальными функциями. – УФА, БашГУ, 2000. – 104 с.
4. Ипатов Е.Б., Лукин Д.С., Палкин Е.А. Численные методы расчета специальных функций волновых катастроф. //Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1985. – т.25 – N2. С.224 – 236.
5. Крюковский А.С., Лукин Д.С., Палкин Е.А. Краевые и угловые катастрофы в задачах дифракции и распространения волн. – Казань Каз.АИ. 1988. –199с.

6. Крюковский А.С., Лукин Д.С., Палкин Е.А, Растягаев Д.В. Волновые катастрофы – фокусировки в дифракции и распространении электромагнитных волн // Радиотехника и электроника. – 2006. – Т.51 – №10. С.1155 – 1192.
7. Крюковский А.С. Равномерная асимптотическая теория краевых и угловых катастроф. – М.: РосНОУ, 2013. – 368 с.
8. Dingle R.B. Asymptotic expansions: their derivation and interpretation. – New York: Acad. Press, 1973. – 522 p.
9. Oldham K.B., Myland J.C. Spanier J. An atlas of functions. Изд.2-е – Springer, 2008. – 748 с.
10. Бабич В.М., Булдырев В.С. Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн. Метод эталонных задач. – М.: Наука. 1972. – 456 с.
11. Палкин Е.А. Использование методов волновой теории катастроф для равномерного описания эффекта Стокса в асимптотиках однократных интегралов./IV Международная научно-техническая конференция "Распространение и дифракция электромагнитных волн в неоднородных средах". Тез. докладов. М.: Изд. МГТУ ГА, 1994г. С.8-10.
12. Palkin E.A. Oscillatory integrals unifom asymptotics for wave fieldas description near the stokes sets. // Proceedings of the 1995 international symposium on electromagnetic theory, St. Peterburg, Russia, May 23-26,1995 / St. Petersburg St.Univ, 1995, P.714-716.