

## Исследование зависимости лучевого распространения в ионосфере Земли от высоты источника излучения

Ю.И. Бова, А.С. Крюковский, Д.С. Лукин

Автономная некоммерческая организация высшего образования Российский новый университет [julia\\_bova@mail.ru](mailto:julia_bova@mail.ru) [kryukovsky@rambler.ru](mailto:kryukovsky@rambler.ru) [luknet1@yandex.ru](mailto:luknet1@yandex.ru)

*Выполнено математическое моделирование распространения радиоволн в ионосфере с учетом магнитного поля Земли в зависимости от высоты источника излучения и угла выхода сигнала. Рассмотрены проекции лучей на разные координатные плоскости: на плоскость распространения, боковую плоскость и «вид сверху». Особое внимание уделено распространению излучения в межслоевом канале и эффекту запирания излучения в канале для определенных частот источника излучения. Сопоставлены результаты вычислений в случае обыкновенной и необыкновенной волны. Показана, что лучевая структура необыкновенной волны повторяет лучевую структуру обыкновенной волны в плоскости распространения, и является отраженной структурой относительно вертикальной оси в боковой плоскости и относительно горизонтальной оси в плоскости «вид сверху».*

*The mathematical modeling of radio wave propagation in the ionosphere in view of a magnetic field of the Earth depending on the height of the radiation source and the angle of the signal exit is executed. The ray projections at different coordinate planes: on a plane of propagation, lateral plane and "top view" plane are considered. The special attention to propagation of radiation in the interlayer channel and the blocking effect of radiation in the channel for the certain frequencies of a source of radiation is given. The results of calculations in cases of an ordinary and extraordinary wave are compared. It is shown, that the ray structure of an extraordinary wave repeats a ray structure of an ordinary wave in a plane of propagation, and is the reflected structure concerning a vertical axis in a lateral plane and concerning a horizontal axis in a plane "top view".*

Актуальность данной работы определена широким использованием электромагнитных волн коротковолнового диапазона для обеспечения дальней радиосвязи, радионавигации, радиолокации, загоризонтного радиозондирования, а также изучения структуры верхней атмосферы Земли – ионосферы. Следует отметить, что, несмотря на значительный объем исследований в данной области (см., например, [1-7]), распространение частотно модулированных (ЧМ) сигналов в анизотропной ионосферной плазме изучено ещё недостаточно. В работах [8-11] нами рассмотрено распространение частотно-модулированного излучения в ионосферной плазме, когда источник излучения расположен на поверхности Земли. Распространение частотно-модулированных сигналов в случае изотропной ионосферной плазмы в зависимости от высоты источника излучения рассмотрено в работе [12]. В отличие от работы [12], в настоящей работе учтено магнитное поле Земли, то есть среда распространения является анизотропной.

В основе нашего подхода лежат лучевые методы, являющиеся традиционными при описании процессов распространения дециметровых радиоволн в различных средах (см. например [13]). При моделировании лучевых траекторий в анизотропной, неоднородной среде бихарактеристическая система уравнений с гамильтонианом:

$$\Gamma = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(\vec{r}, \vec{k}, \omega) \quad (1)$$

имеет вид [4]:

$$\frac{d\vec{r}}{d\tau} = \frac{\partial \Gamma}{\partial \vec{k}}, \quad \frac{d\vec{k}}{d\tau} = -\frac{\partial \Gamma}{\partial \vec{r}}, \quad \frac{dt}{d\tau} = -\frac{\partial \Gamma}{\partial \omega}, \quad \frac{d\omega}{d\tau} = \frac{\partial \Gamma}{\partial t}, \quad (2)$$

где  $\vec{r} = (x, y, z)$  – координаты точки наблюдения,

$\vec{k} = (k_x, k_y, k_z)$  – волновой вектор,

$\omega$  – круговая частота излучения,

$t$  – групповое время,

$\tau$  – параметр вдоль лучевой траектории,

$\varepsilon(\vec{r}, \vec{k}, \omega)$  – эффективная диэлектрическая проницаемость среды распространения,

$c = 2,997925 \cdot 10^8$  м/с – скорость света.

Система (1-2) (см. [8]) обобщает бихарактеристическую систему, использованную в [4] для лучевого описания распространения стационарного сигнала в ионосфере. Эффективная диэлектрическая проницаемость среды для неоднородной анизотропной ионосферы имеет вид (см., например, [7, 13, 14]):

$$\varepsilon_{\pm} = 1 - \frac{2\nu(1-\nu)}{2(1-\nu) - u \sin^2 \alpha \pm \sqrt{u^2 \sin^4 \alpha + 4u(1-\nu)^2 \cos^2 \alpha}} \quad (3)$$

Параметр  $\nu$  является отношением квадрата плазменной частоты к квадрату рабочей частоты:

$$\nu = \left( \frac{\omega_{\text{пл}}}{\omega} \right)^2 = \frac{4\pi e^2 N}{m_e \omega^2}. \quad (4)$$

В формуле (4)  $e = 4,8029 \cdot 10^{-10}$  СГСЭ – заряд электрона,  $m_e = 9,108 \cdot 10^{-28}$  г – масса электрона,  $N$  – величина электронной концентрации в фиксированной точке пространства. В выражении (3) величина  $u$  это отношение квадрата гирочастоты к квадрату рабочей частоты:

$$u = \left( \frac{\omega_H}{\omega} \right)^2 = \frac{e^2 H_0^2}{m_e^2 c^2 \omega^2},$$

а величина  $\alpha$  – это угол между волновым вектором и напряженностью магнитного поля Земли  $\vec{H}_0 = (H_{0x}, H_{0y}, H_{0z})$ . Выражение для квадрата косинуса угла  $\alpha$ , необходимое для применения формулы (3), имеет вид:

$$\cos^2 \alpha = \frac{(H_{0x}k_x + H_{0y}k_y + H_{0z}k_z)^2}{H_0^2 |\vec{k}|^2}.$$

В формуле (3) знак плюс соответствует обыкновенной волне, а знак минус – необыкновенной волне.

В приведённых ниже расчетах амплитуда магнитного поля предполагается постоянной, а ориентация напряжённости магнитного поля относительно локальной системы координат задается двумя углами  $\gamma$  и  $\varphi$ :

$$H_{0x} = H_0 \cos \gamma \cos \varphi, \quad H_{0y} = H_0 \cos \gamma \sin \varphi, \quad H_{0z} = H_0 \sin \gamma.$$

Предположим, что начальный волновой вектор  $\vec{k}(0)$  параметрически зависит от углов выхода луча  $\alpha_0$ :

$$k_x(0) = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_0} \cos \alpha_0, \quad k_y(0) = 0, \quad k_z(0) = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_0} \sin \alpha_0, \quad (5)$$

источник излучения точечный, находится вне магнитоактивной плазмы и расположен в точке с координатами  $(x_0, y_0, z_0)$ :

$$\vec{r}|_{t=0} = (0, 0, z_0). \quad (6)$$

Величина  $\varepsilon_0$  в выражениях (5) – это значение эффективной диэлектрической проницаемости среды в источнике излучения.

Предположим, что сигнал линейно частотно-модулированный (ЛЧМ), то есть формула для мгновенной частоты заполнения имеет вид [8,10]:

$$\begin{aligned} \omega(0) &= \omega_0(1 + \delta\eta), & t(0) &= \eta \\ f(t) &= f_0(1 + \delta t), & \delta &= \frac{2f_\delta}{f_0 T_u} \end{aligned} \quad (7)$$

где  $\eta$  – начальное время выхода луча,

$f_0$  – начальная частота (Гц),

$f_\delta$  – девиация частоты (Гц),

$T_u$  – длительность импульса (с).

В данной работе были приняты следующие значения параметров  $f_0=3,5$  МГц,  $f_\delta=4,8825$  МГц,  $T_u=2,79$  с,  $\delta=1$  с<sup>-1</sup>. При этом максимальная частота равна приблизительно 13,265 МГц. Распространение электромагнитной волны изначально осуществляется в плоскости  $(x, z)$ .

Модель ионосферной плазмы двухслойная. Предполагается, что профиль электронной концентрации имеет вид [4, 14]:

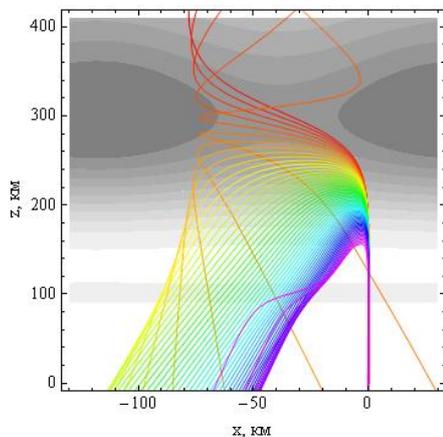
$$\begin{aligned} N(\vec{r}) &= N_0 \left\{ N_r \exp \frac{1}{2} \left[ 1 - \theta - \frac{\exp(-\theta)}{\cos \chi} \right] + \beta \exp \left[ - \left( \frac{z - z_{02}}{z_{m2}} \right)^2 \right] \right\}, \\ N_r &= 1 + \rho \sin \left( \frac{x}{x_r} \right), & \theta &= \frac{z - z_{01}}{z_{m1}/2}. \end{aligned} \quad (8)$$

В выражении (8)  $z_{01}$  – высота максимума слоя  $F2$ ,  $z_{m1}$  – условная полутолщина слоя  $F2$ ,  $\beta$  – безразмерный коэффициент, характеризующий степень ионизации нижнего слоя по отношению к основному,  $z_{02}$  – высота максимума нижнего слоя  $E$ ,  $z_{m2}$  – условная полутолщина нижнего слоя  $E$ ,  $N_0$  – электронная концентрация в максимуме основного слоя  $F2$  если  $\beta=0$ . Максимум ионосферного слоя  $F2$  модулируется периодической функцией  $N_r$ .

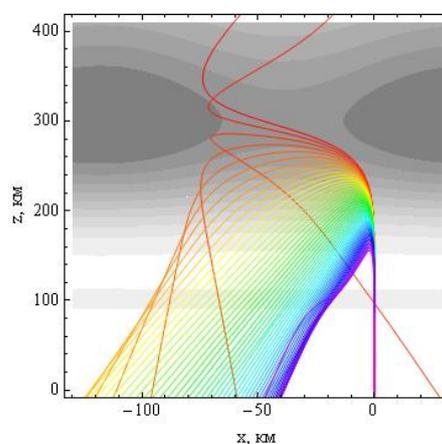
При вычислении применялись следующие значения параметров:  $N_0 = 2 \cdot 10^6$  см<sup>-3</sup>,  $H_0 = 0,36\text{Э}$ ,  $Z_{m1} = 140$  км,  $Z_{01} = 300$  км,  $Z_{m2} = 40$  км,  $Z_{02} = 100$  км,  $\zeta = 0$ ,  $\gamma = 135^\circ$ ,  $\varphi = 90^\circ$ ,  $\beta = 0,1$ ,  $\chi = 0$ ,  $\rho = 0,1$ ,  $x_r = 25$  км.

На рисунке 1 показана лучевая структура ЛЧМ радиосигнала в случае распространения в плоскости  $(x, z)$ , когда источник находится на земле (высота источника излучения 0 км). Цвет луча соответствует частоте излучения, причем фиолетовый цвет соответствует минимальной частоте, а красный цвет максимальной частоте, то есть расположение цветов обратное по отношению к спектру радуги. Угол выхода лучей  $90^\circ$ . Линиями равного уровня на рисунках показана электронная концентрация ионосферы. В районе 100 км по высоте просматривается слой  $E$ . На

высоте 300 км хорошо виден слой F2 и его пространственная модуляция. Сначала все лучи идут по общей вертикальной траектории. В диспергирующей среде (ионосфере) они расходятся. Низкочастотные лучи отражаются от слоя F2 и возвращаются на землю, а высокочастотные просачиваются сквозь слой. Чем выше частота, тем глубже проникает луч в ионосферный слой.



**Рис.1 а.**

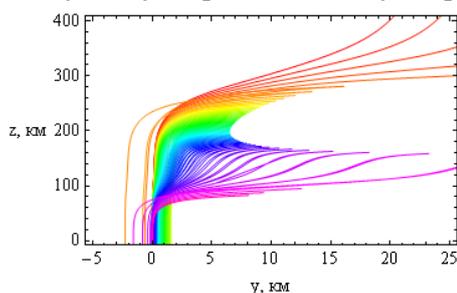


**Рис. 1 б.**

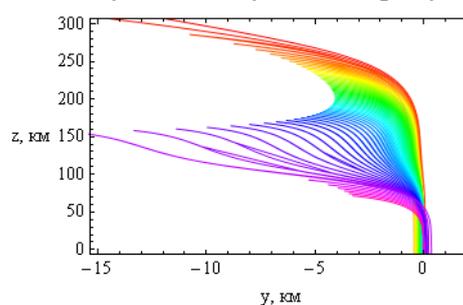
**Лучевые структуры ЛЧМ радиосигнала при высоте источника излучения  $z_0=0$  км в плоскости  $(x,z)$**

**Рис. 1 а – обыкновенная волна, рис. 1 б – необыкновенная волна. Угол выхода  $90^\circ$**

В этом сечении (плоскости  $(x,z)$ ) влияние слоя E незначительно, лучевая структура обыкновенной волны аналогична лучевой структуре необыкновенной волны. Следует отметить (и это видно из рисунков), что обыкновенная волна легче проходит слой F2, чем необыкновенная. Благодаря небольшому возмущению слоя F2 (не более 10%), вся лучевая структура оказывается отраженной влево. Некоторые лучевые траектории, соответствующие высоким частотам, отражаясь от слоя F, резко меняют направление и даже могут вернуться в источник излучения под другим углом, однако интенсивность поля, соответствующая этим лучам, невелика. Слева желтые (оранжевые лучи) образуют каустику, ограничивающую проникновение лучей в левую часть рисунка.



**Рис.2 а.**



**Рис. 2 б.**

**Лучевые структуры ЛЧМ радиосигнала при высоте источника излучения  $z_0=0$  км в плоскости  $(y,z)$**

**Рис. 2 а – обыкновенная волна, рис. 2 б – необыкновенная волна. Угол выхода  $90^\circ$**

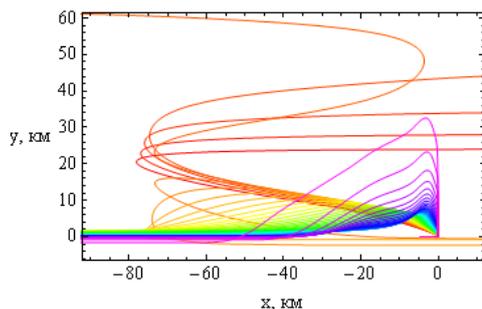
На рисунке 2 а и 2 б показана лучевая структура ЛЧМ радиосигнала в плоскости  $(y,z)$ . Лучи, проходящие ионосферный слой F2, выше 400 км развертываются параллельно оси  $z$  и уходят вверх (красный и оранжевый цвета). Отраженные лучи (от желтого до фиолетового) возвращаются на землю по близким траекториям. Если бы горизонтальные градиент отсутствовал, в этой плоскости  $(y,z)$  все лучи вернулись бы

назад по той же самой траектории. Однако в нашем случае видно, что линии расщепляются и вернувшиеся лучи заполняют некоторую окрестность точки 0.

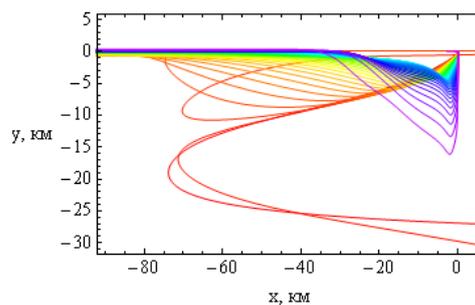
Нижние лучи (в первую очередь фиолетовые) соответствуют отражению от слоя E. В плоскости  $(x,z)$  они отклоняются слабо. На рис. 1 видно, что наиболее сильные отклонения из-за структуры слоя E у фиолетовых лучей.

Средняя группа лучей соответствует отраженным лучам от слоя F2. Отметим, что структура необыкновенной волны в этой плоскости является как бы несколько «усохшим» зеркальным отражением от вертикальной оси структуры обыкновенной волны.

На рисунке 3 а и 3 б показана лучевая структура ЛЧМ радиосигнала в плоскости  $(x,y)$ . Это вид на лучевую структуру сверху.



**Рис.3 а.**



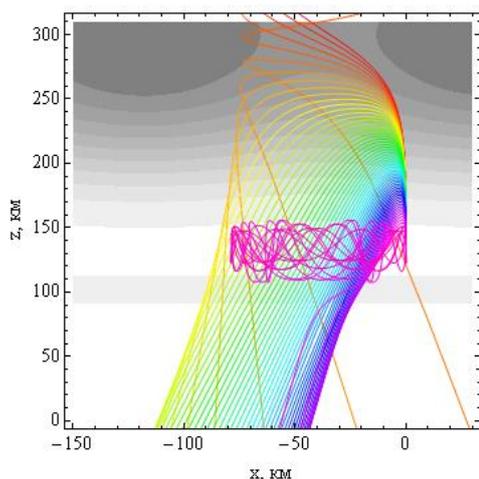
**Рис. 3 б.**

**Лучевые структуры ЛЧМ радиосигнала при высоте источника излучения  $z_0=0$  км в плоскости  $(x,y)$**

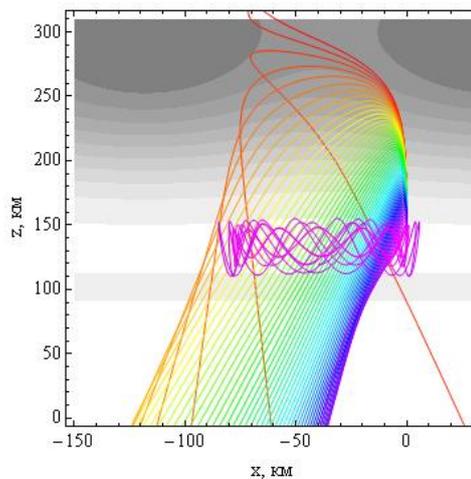
**Рис. 3 а – обыкновенная волна, рис. 3 б – необыкновенная волна. Угол выхода  $90^\circ$**

Структура необыкновенной волны в этой плоскости похожа на «усохшее» зеркальное отражение от горизонтальной оси структуры обыкновенной волны. В случае необыкновенной волны распространение сигнала вдоль оси  $y$  существенно «компактнее».

Рассмотрим теперь случай, когда источник излучения находится в межслоевом канале на высоте 142 км. На рисунке 4 показана лучевая структура ЛЧМ радиосигнала в случае распространения в плоскости  $(x,z)$ .



**Рис.4 а.**



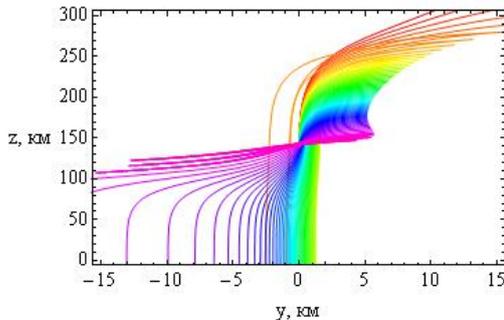
**Рис. 4 б.**

**Лучевые структуры ЛЧМ радиосигнала при высоте источника излучения  $z_0=142$  км в плоскости  $(x,z)$**

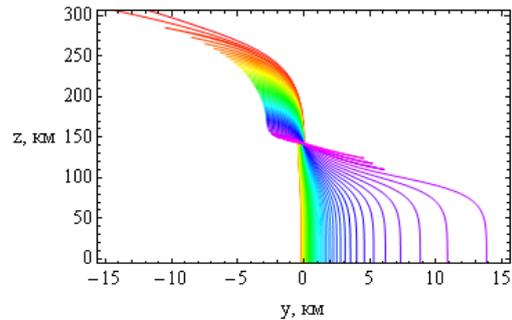
**Рис. 4 а – обыкновенная волна, рис. 4 б – необыкновенная волна. Угол выхода  $90^\circ$**

Сравнивая рис. 1 и рис. 4, видим, что в целом лучевая структура сохранилась, однако в межслоевом канале образовался волновод (фиолетовые лучи), причем в силу пространственной модуляции волна оказалась запертой в этом волноводе. Этот эффект характерен как для обыкновенной, так и для необыкновенной волны. Большая часть стоячей волны оказалась левее источника излучения, но в случае необыкновенной волны небольшой отрезок структуры наблюдается и справа от источника.

На рисунках 5 а и 5 б представлена лучевая структура ЛЧМ радиосигнала в плоскости  $(y,z)$ .



**Рис.5 а.**



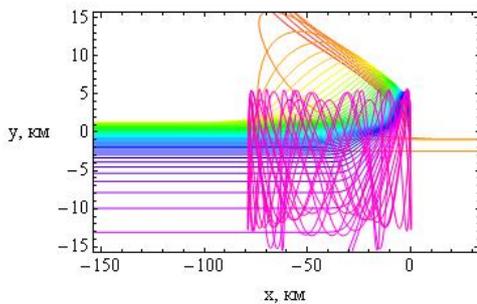
**Рис. 5 б.**

**Лучевые структуры ЛЧМ радиосигнала при высоте источника излучения  $z_0=142$  км в плоскости  $(y,z)$**

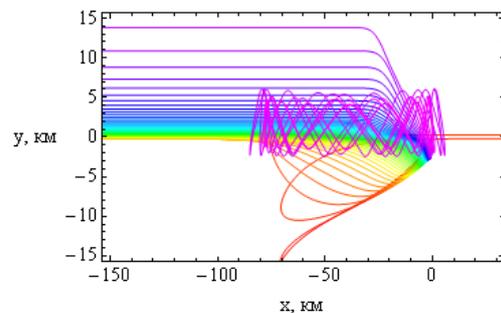
**Рис. 5 а – обыкновенная волна, рис. 5 б – необыкновенная волна. Угол выхода  $90^\circ$**

Видно, что лучи, возвращающиеся на землю, движутся по существенно разным траекториям, а лучи, распространяющиеся в волноводе, возвращаются к источнику по близким траекториям. Если сравнивать рис.2 и рис. 5, то видно, что верхние части рисунков аналогичны.

На рисунке 6 а и 6 б показана лучевая структура ЛЧМ радиосигнала в плоскости  $(x,y)$ .



**Рис.6 а.**



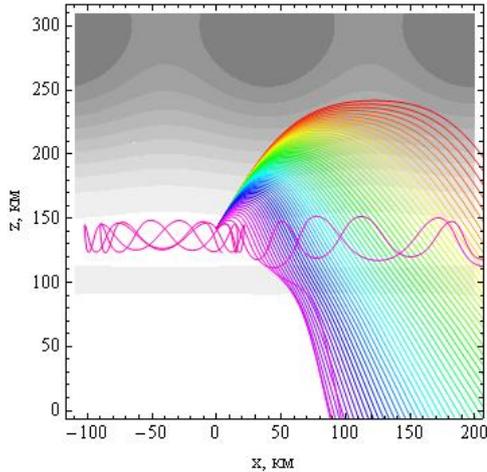
**Рис. 6 б.**

**Лучевые структуры ЛЧМ радиосигнала при высоте источника излучения  $z_0=142$  км в плоскости  $(x,y)$**

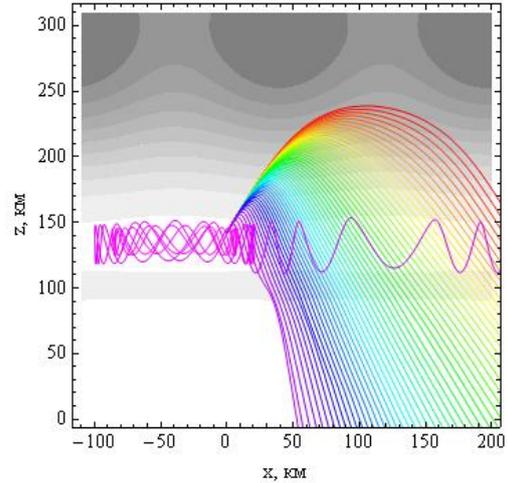
**Рис. 6 а – обыкновенная волна, рис. 6 б – необыкновенная волна. Угол выхода  $90^\circ$**

Как и на рис. 4, в этой плоскости хорошо видно волноводное распространение (фиолетовые лучи), отсутствующее на рис. 3, когда источник излучения располагался на земле. Однако размах осцилляций в случае необыкновенной волны существенно меньше. В остальном структуры рис. 6 а и б аналогичны структурам рис. 3 а и б.

Теперь рассмотрим случай, когда угол выхода лучей составляет  $60^\circ$  с положительным направлением оси  $x$ . На рисунке 7 показана лучевая структура в случае распространения в плоскости  $(x,z)$ .



**Рис.7 а.**



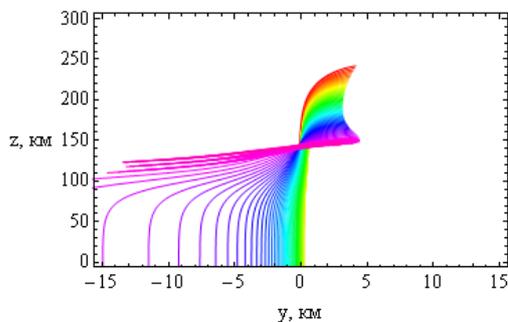
**Рис. 7 б.**

**Лучевые структуры ЛЧМ радиосигнала при высоте источника излучения  $z_0=142$  км в плоскости  $(x,z)$**

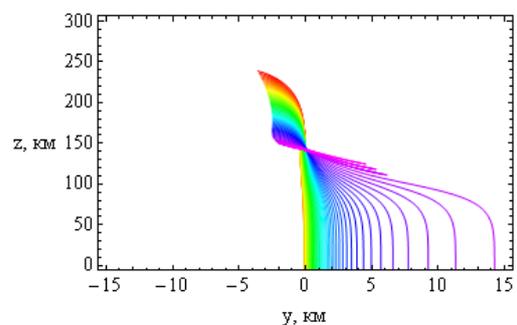
**Рис. 7 а – обыкновенная волна, рис. 7 б – необыкновенная волна. Угол выхода  $60^\circ$**

Лучи, проходящие все ионосферные слои, как в случае обыкновенной, так и в случае необыкновенной волны, отсутствуют. В волноводном канале часть лучей оказывается запертой, а часть лучей распространяется в положительном направлении оси  $x$ , причем в случае необыкновенной волны запертых лучей в волноводе оказывается больше, а распространяющихся меньше.

На рисунках 8 а и 8 б приведена лучевая структура ЛЧМ радиосигнала в плоскости  $(y,z)$ .



**Рис.8 а.**



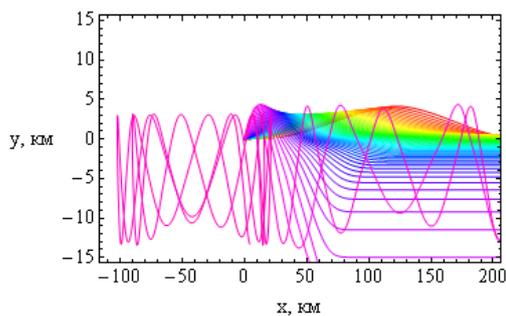
**Рис. 8 б.**

**Лучевые структуры ЛЧМ радиосигнала при высоте источника излучения  $z_0=142$  км в плоскости  $(y,z)$**

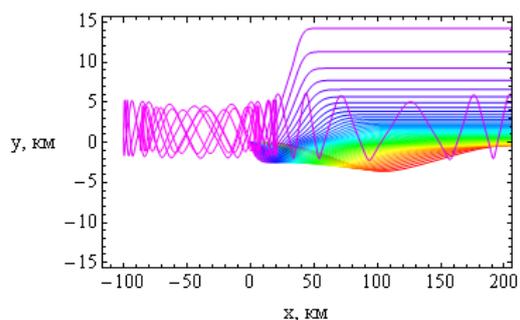
**Рис. 8 а – обыкновенная волна, рис. 8 б – необыкновенная волна. Угол выхода  $60^\circ$**

Если сравнить рис. 8 и рис. 5, видно, что, поскольку лучи, проходящие ионосферу, отсутствуют, то все верхние лучи в этой плоскости возвращаются в источник.

На рисунке 9 а и 9 б показана лучевая структура радиосигнала в плоскости  $(x,y)$ .



**Рис.9 а.**



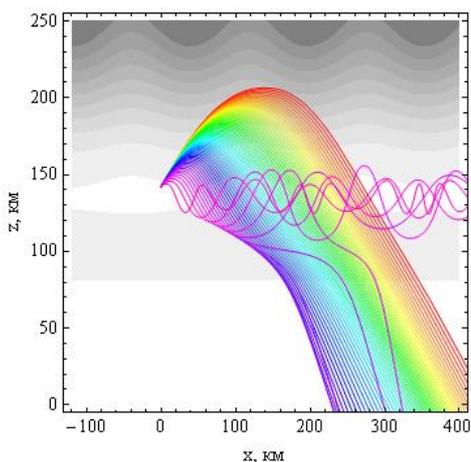
**Рис. 9 б.**

**Лучевые структуры ЛЧМ радиосигнала при высоте источника излучения  $z_0=142$  км в плоскости  $(x,y)$**

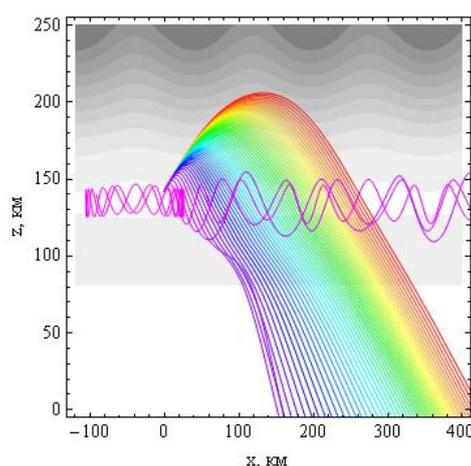
**Рис. 9 а – обыкновенная волна, рис. 9 б – необыкновенная волна. Угол выхода  $60^\circ$**

Анализируя рис. 9 а и рис. 9 б, видим, что, как и на рис. 7, наблюдается волноводное распространение в правой части рисунков в волноводном канале, а также лучи, запертые волноводу слева от источника.

Ситуация, когда угол выхода лучей ещё меньше – составляет  $40^\circ$  с положительным направлением оси  $x$ , показана на рисунках 10 в случае лучевого распространения в плоскости  $(x,z)$ .



**Рис.10 а**



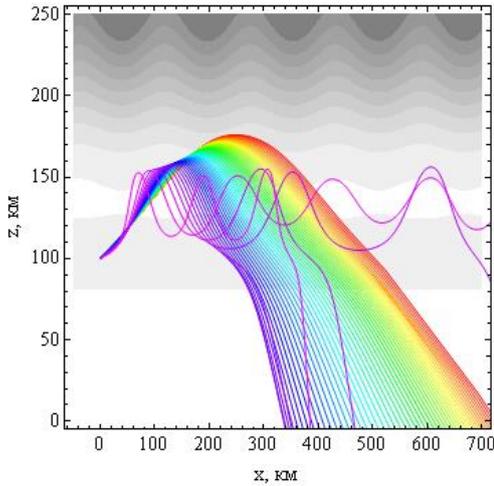
**Рис. 10 б**

**Лучевые структуры ЛЧМ радиосигнала при высоте источника излучения  $z_0=142$  км в плоскости  $(x,z)$**

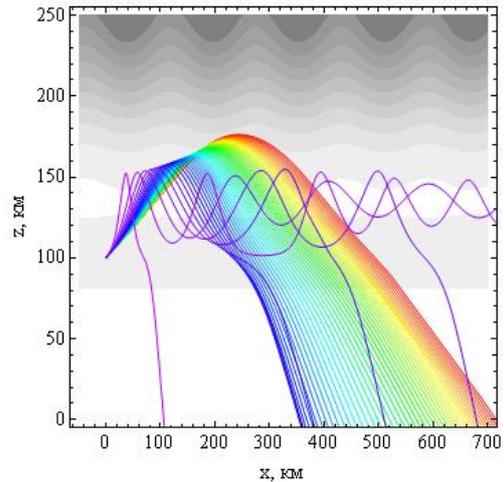
**Рис. 10 а – обыкновенная волна, рис. 10 б – необыкновенная волна. Угол выхода  $40^\circ$**

Видно, что при этом градусе выхода лучей в случае обыкновенной волны стоячая волна в левой части волновода исчезла, а в случае необыкновенной волны ещё сохранилась.

На рис. 11 рассмотрен случай, когда угол выхода луча  $20^\circ$ , а источник излучения расположен на высоте максимума слоя E – 100 км.



**Рис.11 а.**



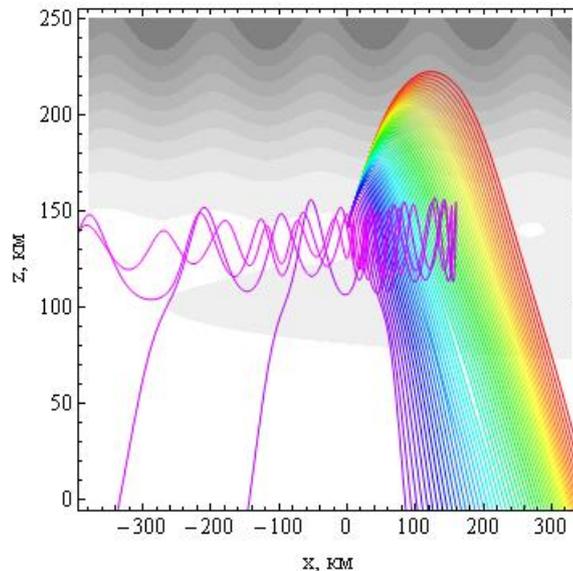
**Рис. 11 б.**

**Лучевые структуры ЛЧМ радиосигнала при высоте источника излучения  $z_0=100$  км в плоскости  $(x,z)$**

**Рис. 11 а – обыкновенная волна, рис. 11 б – необыкновенная волна. Угол выхода  $20^\circ$**

Показана плоскость распространения  $(x,z)$ . Источник излучения, находясь в максимуме слоя, запитывает волновой межслоевой канал, причем лучи после нескольких колебаний высвечиваются из канала и уходят в направлении земли.

В заключение приведем пример, соответствующий случаю исчезновения слоя E и соответственно межслоевого канала. Для этого в формуле (8) заменим коэффициент  $\beta$  на  $0,1(1 + 0,02x/x_r)$ . На рис. 12 показана лучевая структура радиоволны в плоскости  $(x,z)$ .



**Рис. 12. Лучевая структура радиосигнала при высоте источника излучения  $z_0=142$  км в плоскости  $(x,z)$ . Необыкновенная волна. Угол выхода  $50^\circ$**

Видно, что лучи (фиолетовый цвет), отражаясь от правого конца волновода, уходят влево и постепенно высвечиваются на землю.

Таким образом, в настоящей работе сопоставлены особенности распространения ЛЧМ сигналов в двухслойной анизотропной ионосфере при наличии горизонтальных градиентов в случае обыкновенной и необыкновенной волны с учетом изменения

высоты источника. Рассмотрены различные координатные плоскости. Основное внимание уделено канализированному распространению. Для расчетов лучевых характеристик применялась бихарактеристическая система дифференциальных уравнений, неизвестными в которой являются координаты луча, компоненты волнового вектора, а также частота и время.

Из результатов моделирования следует, что при изучении распространения ЛЧМ сигналов в анизотропных средах необходимо рассчитывать электромагнитные поля со сложной каустической структурой, используя метод канонического оператора Маслова [12] и волновую теорию катастроф [15-20], поскольку для описания волновых полей в соответствии с приведенными выше рисунками необходимо рассчитывать поля на каустиках (огibaющих лучевых семейств), включая каустические особенности (катастрофы). Также для описания распространения ЛЧМ сигналов в ионосфере желательно строить динамические модели используя, восстановленные по данным радиотомографии [21], профили электронной концентрации и различные модели магнитного поля Земли.

*Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты № 15-02-04206-а, №17-02-01183-а).*

### **Литература**

1. Иванов Д.В. Методы и математические модели исследования распространения в ионосфере сложных декаметровых сигналов и коррекции их дисперсионных искажений. Монография. Йошкар-Ола: Марийский гос. технический ун-т. 2006. 266 с.
2. Иванов В.А., Иванов Д.В., Лащевский А.Р., Рябова М.И. Исследование дисперсионных искажений широкополосных элементов непрерывного ЛЧМ-сигнала при изменении их длительности сверх критической. // Вестник Поволжского государственного технологического университета. Серия: Радиотехнические и инфокоммуникационные системы, 2014. № 1(20). С. 43-53.
3. Захаров В.Е., Котова Д.С. Моделирование дисперсионных искажений ЛЧМ-импульсов радиоволн в ионосфере. // Труды XXIV Всероссийской научной конференции «Распространение радиоволн», (29 июня–5 июля 2014; Иркутск) / Иркутск: ИСЗФ СО РАН, 2014. Т.4. С. 97–100.
4. Крюковский А.С., Лукин Д.С., Кирьянова К.С. Метод расширенной бихарактеристической системы при моделировании распространения радиоволн в ионосферной плазме. // Радиотехника и электроника, М.: Наука. 2012. Т.57. №9. С. 1028-1034.
5. Крюковский А.С., Лукин Д.С., Растягаев Д.В. Теория пространственной фокусировки видеоимпульсов в диспергирующих средах. // Электромагнитные волны и электронные системы. 2007. Т.12. № 8. С.15-25.
6. Крюковский А.С., Зайчиков И.В. Особенности распространения радиоимпульсов в средах с дисперсией. // Электромагнитные волны и электронные системы. 2008. Т.13. № 8. С. 36-41.
7. Кирьянова К.С., Крюковский А.С. Особенности лучевого распространения радиоволн в ионосфере Земли// Т-Comm: Телекоммуникации и транспорт. 2012. № 11. – С. 25–28.
8. Крюковский А.С., Растягаев Д.В., Скворцова Ю.И. Исследование распространения частотно-модулированных пространственно-временных сигналов в неоднородной анизотропной ионосфере //Вестник Российского нового университета. Серия «Управление, вычислительная техника и информатика» / М.: РосНОУ, 2013. Выпуск 4. – С. 47–52.

9. Крюковский А. С., Лукин Д. С., Растягаев Д. В., Скворцова Ю. И. Математическое моделирование распространения частотно-модулированных радиоволн в ионосферной плазме // Радиотехника и электроника, 2015, Т. 60, № 10. С. 1001-1009.
10. Крюковский А.С., Лукин Д.С., Растягаев Д.В., Скворцова Ю.И. Численное моделирование распространения пространственно-временных частотно-модулированных радиоволн в анизотропной среде//Т-Сот:Телекоммуникации и транспорт. 2015. Т.9. №9. С.40-47.
11. Крюковский А.С., Скворцова Ю.И. Математическое моделирование распространения радиоволн в нестационарной плазме с учетом кривизны поверхности Земли и ионосферных слоев. //Вестник Российского нового университета. Серия: Сложные системы: модели анализ и управление. 2016. №1-2. С.34-40
12. Бова Ю.И. Математическое моделирование распространения радиоволн в ионосфере Земли в зависимости от высоты источника излучения //Вестник Российского нового университета. Серия: Сложные системы: модели анализ и управление. 2016. №3. С.10-15.
13. Лукин Д.С., Палкин Е.А. Численный канонический метод в задачах дифракции и распространения электромагнитных волн в неоднородных средах. М.: МФТИ, 1982. 159 с.
14. Крюковский А.С., Лукин Д.С., Растягаев Д.В. Математическое моделирование распространения радиоволн в анизотропной неоднородной ионосфере. // Вестник Российского нового университета. 2009. № 2. С. 7-14.
15. Крюковский А.С. Равномерная асимптотическая теория краевых и угловых волновых катастроф. Монография. М.: РосНОУ, 2013.–368 с.
16. Крюковский А.С., Скворцова Ю.И. Применение теории катастроф для описания пространственно-временной структуры частотно-модулированного сигнала в плазме // Электромагнитные волны и электронные системы. 2013. Т. 18. № 8. С. 18-23.
17. Крюковский А.С., Растягаев Д.В. О необходимых и достаточных условиях образования каспидных катастроф. // Распространение и дифракция волн в неоднородных средах. Сб./ М.:МФТИ 1989. С. 56-60.
18. Крюковский А.С., Растягаев Д.В. Исследование устойчивых фокусировок, возникающих при нарушении симметрии волнового фронта. // Дифракция и распространение электромагнитных волн. Сб./ М.: МФТИ, 1993. С. 20-37.
19. Дорохина Т.В., Крюковский А.С., Лукин Д.С. Информационная система «Волновые катастрофы в радиофизике, акустике и квантовой механике». // Электромагнитные волны и электронные системы. 2007. Т.12. № 8. С.71-75.
20. Крюковский А.С., Лукин Д.С., Палкин Е.А. Численное сравнение двух асимптотических методов решения задач дифракции волн в плавнеоднородных средах // Изв. МВ и ССО СССР (Радиофизика). 1986. Т. 29. № 1. С. 79 - 88.
21. Андреева Е.С., Крюковский А.С., Куницын В.Е., Лукин Д.С., Растягаев Д.В., Кирьянова К.С. Моделирование лучевой и каустической структуры электромагнитных полей по данным радиотомографии ионосферы в окрестности экваториальной аномалии. // «Распространение радиоволн», сб.докл. XXIII Всероссийской научной конференции. (23–26.05.2011; Йошкар-Ола) /Йошкар-Ола: Марийский государственный технический университет, 2011. Т.3 С. 288-291.