

Равномерная асимптотика коэффициентов отражения и прохождения плоской волны для модели плазменного слоя с параболическим профилем электронной концентрации.

Е.А. Палкин, А.А. Петрович

Российский новый университет (РосНОУ)

г. Москва, ул. Радио, д.22;

Московский физико-технический институт (ГУ МФТИ),

г.Долгопрудный М.О., Институтский пер., д.9;

palkin@rosnou.ru; aa@petrovich@bk.ru

Предложены формулы для расчета коэффициентов прохождения и отражения плоской волны в полупрозрачном параболическом ионосферном слое, справедливые во всем диапазоне изменений характеристик слоя: от отражающего (в приближении геометрической оптики), до прозрачного (в том же приближении) слоя. Данные формулы получены на основе асимптотики точного решения модельной задачи и дают равномерное по указанным параметрам описание эффектов подбарьерного просачивания и надбарьерного отражения. В предельных случаях преимущественного отражения или преимущественного прохождения волны выражения переходят в неравномерные асимптотики, справедливые в соответствующих диапазонах значений параметров слоя.

The calculation formulas for the coefficients of transmission and reflection of a plane wave in a semi-transparent parabolic ionospheric layer have been proposed. They are valid in all range of layer characteristics changes: by reflecting (in the approximation of geometrical optics) layer, to transparent (in the same approximation) layer. These formulas are obtained on the basis of the asymptotic expansions of strict solution of the model problem and give a uniform description of the effects of sub-barrier seepage and over-barrier reflection. In extreme cases of dominant reflection or dominant passing wave these expressions transfer into the nonuniform asymptotics, valid in respective ranges of layer parameters.

В работе [1] на основе асимптотических представлений точного решения задачи о падении плоской волны на неоднородный слой плазмы с параболическим профилем электронной концентрации нами были получены следующие формулы для оценки коэффициентов отражения и прохождения:

$$R_{ref} = e^{-\frac{i\pi}{2}} * \left(1 + e^{-\frac{k\pi}{\sqrt{\beta}}(\beta a^2 - \cos^2 \theta)} \right)^{-1}, \quad (1)$$

$$T_{ref} = e^{-\frac{k\pi}{2\sqrt{\beta}}(\beta a^2 - \cos^2 \theta)} * \left(1 + e^{-\frac{k\pi}{\sqrt{\beta}}(\beta a^2 - \cos^2 \theta)} \right)^{-1} \quad (2)$$

и

$$R_{tr} = e^{-\frac{i\pi}{2}} * e^{-\frac{k\pi}{2\sqrt{\beta}}|\beta a^2 - \cos^2 \theta|} * \left(1 + e^{-\frac{k\pi}{\sqrt{\beta}}|\beta a^2 - \cos^2 \theta|} \right)^{-1}, \quad (3)$$

$$T_{tr} = \left(1 + e^{-\frac{k\pi}{\sqrt{\beta}} |\beta a^2 - \cos^2 \theta|} \right)^{-1} . \quad (4)$$

Здесь R и T , соответственно, – коэффициенты отражения и прохождения плоской волны, падающей на слой под углом θ (см. рис.1), а их индексы соответствуют случаям «классически» отражающего слоя ("ref") и «классически» прозрачного слоя ("tr").

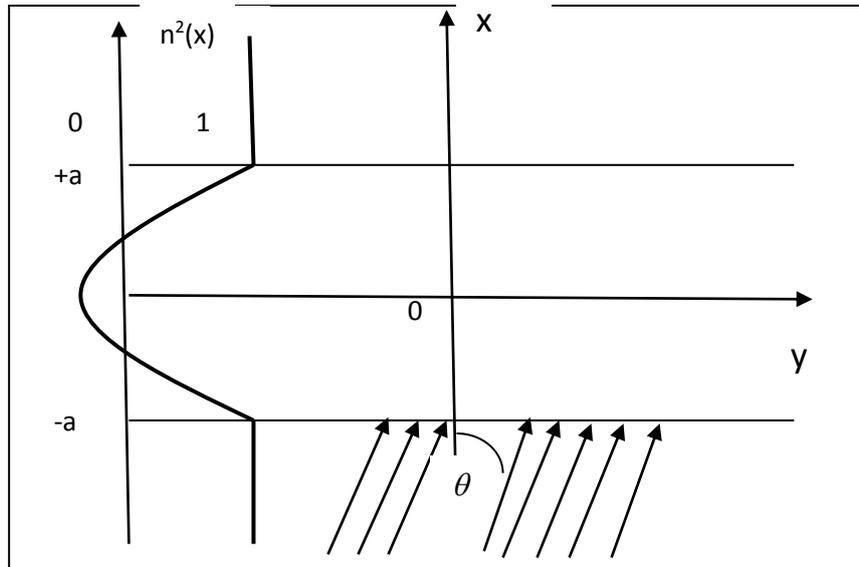


Рис. 1. Геометрия задачи.

Формулы (1) – (4) представляют неравномерные асимптотики коэффициентов отражения и прохождения волны и справедливы при условии:

$$|\eta| = |\beta a^2 - \cos^2 \theta| \geq C_\eta > 0 . \quad (5)$$

При этом, $\eta > 0$ отвечает отражающему слою, а $\eta < 0$ – прозрачному слою; a и β – параметры слоя ($2a$ – «толщина» параболического слоя, β – его «плотность»), k – волновое число (k – большой параметр задачи). Модель показателя преломления в области слоя имеет вид:

$$n^2(x) = 1 - \beta * (a^2 - x^2) , \quad x \in [-a, +a] \quad (6)$$

вне слоя $n^2(x) = 1$.

В работе [1] прямым расчетом также получены значение коэффициентов R и T для случая «критического» слоя, когда $\eta = 0$:

$$R_{cr} = -i/\sqrt{2} , \quad (7)$$

$$T_{cr} = 1/\sqrt{2}. \quad (8)$$

Формулы (1) – (4), естественно, не дают значения (7) и (8).

Для многих прикладных задач важным является описание эффектов отражения и прохождения волны, равномерное по параметру η , которое включает весь диапазон значений η , соответствующий переходу между формулами (1), (2) и формулами (3), (4), отражая в том числе и значения (7) и (8). В данной работе мы восполним этот пробел, основываясь на асимптотических представлениях точного решения задачи, включающего функции параболического цилиндра (функции Вебера-Эрмита), предложенные в [2]. Эти равномерные асимптотики содержат интеграл Бёмера – Френеля [3], который, в свою очередь выражается через гамма-функцию комплексного аргумента. Итоговые формулы позволяют рассчитать коэффициенты R и T при непрерывном изменении параметра η , что, например, может быть обусловлено изменением угла падения на слой радиоволны, излученной точечным источником.

В качестве исходного выражения, подлежащего анализу, возьмём общее решение сформулированной задачи для области внутри слоя при задании граничных условий в виде подающей на слой из области ниже слоя ($x < -a$) плоской волны единичной амплитуды и отсутствия падающей на слой волны в области выше слоя. Такое решение имеет вид:

$$\psi(x, y) = \psi_x(x) * \exp(iky * \sin \theta), \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} \psi_x(x) &= C_+ \psi_+(x) + C_- \psi_-(x), \\ x &\in [-a, +a] \end{aligned}, \quad (10)$$

а сами функции $\psi_{\pm}(x)$ представимы через функции параболического цилиндра $D_{\nu, k}^{\pm}(X)$ (функции Вебера – Эрмита [3]) с большим параметром:

$$\psi_{\pm}(x) = \exp\left(ik \left(\frac{1}{2} x^2 \sqrt{\beta}\right)\right) * D_{\nu, k}^{\pm}(X), \quad (11)$$

$$D_{\nu, k}^{\pm}(X) = \int_{\gamma^{\pm}} \exp\{ik(t^2 + tX + \nu \ln t)\} * t^{-1/2} dt. \quad (12)$$

Контур γ^{\pm} проходит в комплексной плоскости переменной t из ∞ в третьем квадранте и уходит на ∞ в первом квадранте, огибая, соответственно, сверху (γ^+) или снизу (γ^-) начало координат. Параметры функций параболического цилиндра связаны с переменными модельной задачи следующими соотношениями:

$$X = 2\beta^{1/4}x; \quad \nu = \frac{\eta}{2\sqrt{\beta}} = \frac{\beta a^2 - \cos^2 \theta}{2\sqrt{\beta}}, \quad ka^2 \sqrt{\beta} \gg 1. \quad (13)$$

Граничные условия формулируются для компонент поля, соответствующих волнам, падающей на слой снизу и падающей на слой сверху:

$$\Psi_{fallup} = e^{ik(x\cos\theta+y\sin\theta)} \Big|_{x=-a}, \quad \Psi_{falldown} = 0 \Big|_{x=+a}. \quad (14)$$

Поэтому, для нахождения констант C_+ и C_- нужно, взяв равномерную по η асимптотику решения (9), выделить компоненты, отвечающие падающим волнам и воспользоваться условиями (14). Такой алгоритм был использован в [1] для построения неравномерных оценок коэффициентов R и T .

Воспользовавшись результатами работ [2, 4], искомую асимптотику получим из равномерной в указанной области переменных асимптотики функций Вебера – Эрмита (11), которая имеет вид:

$$D_{\nu,k}^{\pm}(x) \approx e^{i\theta_1} B^{\mp}(\lambda) l_1 k^{-1/2} + e^{i\theta_2} * l_2 * k^{-1/2} * e^{\Gamma} \quad (15)$$

где

$$B^{\mp}(\lambda) = \int_{\tilde{\gamma}^{\mp}} \exp \{i(\mp t + \lambda \ln(t))\} * t^{-1/2} dt \quad - \quad (16)$$

интеграл Вебера – Френеля, остальные параметры соответствуют обозначениям работы [2]. В (16) контур $\tilde{\gamma}^+$ для знака «-» в экспоненте проходит, огибая точку «0» сверху, по нижней части комплексной плоскости переменной t с разрезом от точки «0» вдоль отрицательной части мнимой оси, что обеспечивает выделение регулярных ветвей логарифмической и корневой функций и допускает необходимые деформации контура $\tilde{\gamma}^+$ в (12); для знака «+» в экспоненциальной ядре контур $\tilde{\gamma}^-$ и разрез выбираются симметричными контуру $\tilde{\gamma}^+$ относительно действительной оси. Для расчетов удобнее представить функцию (16) через гамма-функцию комплексного аргумента:

$$B^-(\lambda) = \hat{\Gamma} \left(\frac{1}{2} + i\lambda \right) * e^{-i\frac{\pi}{4}} * \left(e^{\frac{\lambda\pi}{2}} + e^{-\lambda\frac{3\pi}{2}} \right) \quad (17)$$

Также полезным для дальнейших вычислений является соотношение:

$$D_{\nu,k}^-(X) = D_{\nu,k}^+(-X) * e^{i\frac{\pi}{2}} * e^{k\nu\pi}. \quad (18)$$

Кроме того, для сравнения различных асимптотических представлений в широком диапазоне изменений параметра η (5) (или ν (13)), мы используем уточненную формулу для коэффициента в l_1 (15) (ср. [2]):

$$l_1 = \frac{1}{\sqrt{|X|}} * \left(1 - \frac{8\nu}{X^2} \right)^{-1/4}. \quad (19)$$

Важным в разложении (15) является следующее: при $x \leq -C_x < 0$ $l_1 = 0$ для $D^-_{v,\Lambda}(x)$ и суммарные фазы $k \frac{1}{2} x^2 \sqrt{\beta} + \Theta_2$ в асимптотике (15) как для $D^-_{v,\Lambda}(x)$, так и для $D^+_{v,\Lambda}(x)$ равны и соответствуют плоским волнам, падающим на слой снизу; аналогично при $x \geq C_x > 0$ $l_1 = 0$ для $D^+_{v,\Lambda}(x)$ и суммарные фазы $k \frac{1}{2} x^2 \sqrt{\beta} + \Theta_2$ в асимптотиках (15) соответствуют плоским волнам, падающим на слой сверху. Таким образом, условия (14) принимают следующий вид:

$$\frac{e^{\frac{i\pi}{4}} * \sqrt{\pi} * \beta^{\frac{1}{8}}}{\sqrt{k * \text{Cos}\theta}} * (C_+ + C_-) = 1, \quad (20)$$

$$\frac{\sqrt{\pi} * \beta^{\frac{1}{8}}}{\sqrt{k * \text{Cos}\theta}} * \left(C_+ * e^{-\frac{i\pi}{4}} * e^{-k\nu\pi} + C_- * e^{\frac{i3\pi}{4}} * e^{k\nu\pi} \right) = 0. \quad (21)$$

Откуда находим, что:

$$C_+ = \beta^{-\frac{1}{8}} \sqrt{\frac{k * \text{Cos}\theta}{\pi}} * \frac{e^{-\frac{i\pi}{4}}}{1 + e^{-2k\nu\pi}}, \quad C_- = \beta^{-\frac{1}{8}} \sqrt{\frac{k * \text{Cos}\theta}{\pi}} * \frac{e^{\frac{i\pi}{4}} * e^{-2k\nu\pi}}{1 + e^{-2k\nu\pi}}. \quad (22)$$

При вычислениях использованы результаты работы [2] и формулы (15) и (18). Выделяя теперь в (10) равномерное асимптотическое представление для отраженной слоем волны и для прошедшей через слой волны, окончательно получаем для коэффициентов отражения и прохождения оценки, равномерные по значениям η (или ν):

$$\begin{aligned} R &= e^{-\frac{i\pi}{4}} * \frac{1}{\sqrt{2\pi}} * \frac{1}{1 + e^{-\frac{k\pi}{\sqrt{\beta}}(\beta a^2 - \text{Cos}^2\theta)}} * B^{-\left(\frac{k}{2\sqrt{\beta}}(\beta a^2 - \text{Cos}^2\theta)\right)} = \\ &= e^{-\frac{i\pi}{2}} * \frac{1}{\sqrt{2\pi}} * \frac{\left(e^{\frac{k\pi}{4\sqrt{\beta}}(\beta a^2 - \text{Cos}^2\theta)} + e^{-\frac{3k\pi}{4\sqrt{\beta}}(\beta a^2 - \text{Cos}^2\theta)}\right)}{1 + e^{-\frac{k\pi}{\sqrt{\beta}}(\beta a^2 - \text{Cos}^2\theta)}} * \hat{\Gamma}\left(\frac{1}{2} + i \frac{k}{2\sqrt{\beta}}(\beta a^2 - \text{Cos}^2\theta)\right), \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} T &= e^{\frac{i\pi}{4}} * \frac{1}{\sqrt{2\pi}} * \frac{e^{-\frac{k\pi}{2\sqrt{\beta}}(\beta a^2 - \text{Cos}^2\theta)}}{1 + e^{-\frac{k\pi}{\sqrt{\beta}}(\beta a^2 - \text{Cos}^2\theta)}} * B^{-\left(\frac{k}{2\sqrt{\beta}}(\beta a^2 - \text{Cos}^2\theta)\right)} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} * \frac{\left(e^{-\frac{k\pi}{4\sqrt{\beta}}(\beta a^2 - \text{Cos}^2\theta)} + e^{-\frac{5k\pi}{4\sqrt{\beta}}(\beta a^2 - \text{Cos}^2\theta)}\right)}{1 + e^{-\frac{k\pi}{\sqrt{\beta}}(\beta a^2 - \text{Cos}^2\theta)}} * \hat{\Gamma}\left(\frac{1}{2} + i \frac{k}{2\sqrt{\beta}}(\beta a^2 - \text{Cos}^2\theta)\right) \end{aligned} \quad (24)$$

В формулах (23), (24) коэффициенты отражения и прохождения представлены без учета суммарного набег фазы волны в слое, определяемого классической формулой геометрооптического приближения.

Если воспользоваться асимптотической оценкой гамма-функции при большом значении мнимой части аргумента:

$$\hat{\Gamma}\left(\frac{1}{2} + ik\nu\right) \approx \sqrt{2\pi} * \frac{e^{ik\nu(\ln(k|\nu|)-1)}}{(e^{\frac{k\pi|\nu|}{2}} + e^{-\frac{3k\pi|\nu|}{2}})} \quad (25)$$

то можно вновь перейти к формулам (1) – (4). Также нетрудно убедиться, что при $\eta = 0$ (или $\nu = 0$) формулы (23) и (24) приводят к результатам (7) и (8).

Интересно отметить, что асимптотические формулы (23), (24) показывают, что эффект «полупрозрачности» параболического слоя, точнее переход между классически отражающим слоем и классически прозрачным слоем происходит при углах падения, близких к критическому углу:

$$\cos^2 \theta_{cr} = \beta a^2,$$

причем диапазон углов, где рассматриваемые эффекты существенны определяется оценкой:

$$\delta\theta_{cr} \approx \frac{\beta^{\frac{1}{2}}}{k * \sin 2\theta_{cr}}. \quad (26)$$

Для моделей распространения коротких радиоволн в ионосферных слоях эта оценка примет вид:

$$\delta\theta_{cr} \approx \frac{1}{ka * \sin 2\theta_{cr}} * \frac{f_{cr}}{f}, \quad (27)$$

где f_{cr} - критическая частота слоя, а f - частота радиоволны. Из (27) следует, что при малых углах падения и частотах, близких к критической диапазон углов «полупрозрачности» слоя может составлять значимую часть диаграммы излучения источника. Например, при $ka \approx 10^4$ и $\theta_{cr} \approx 5^\circ$, диапазон $\delta\theta_{cr} \approx 0.05^\circ$, а при $\theta_{cr} \approx 2^\circ$, диапазон $\delta\theta_{cr} \approx 0.08^\circ$. В «тонких» ионосферных слоях параметр ka может уменьшиться на порядок, соответственно на порядок увеличится диапазон углов эффекта полупрозрачности. При вертикальном падении на слой эффекты полупрозрачности всегда присутствуют в окрестности критической частоты слоя.

Таким образом, анализ равномерных асимптотических представлений для коэффициентов отражения и прохождения позволяет сделать вывод о том, что дифракционно-лучевая теория распространения радиоволн в неоднородной ионосфере [5,6] требует дальнейшего развития для описания эффектов «полупрозрачности» неоднородных ионосферных слоёв для радиоволн КВ диапазона. Пример возможной лучевой картины, учитывающей разные типы лучей, возникающих при учете данного эффекта представлен на рисунке 2.

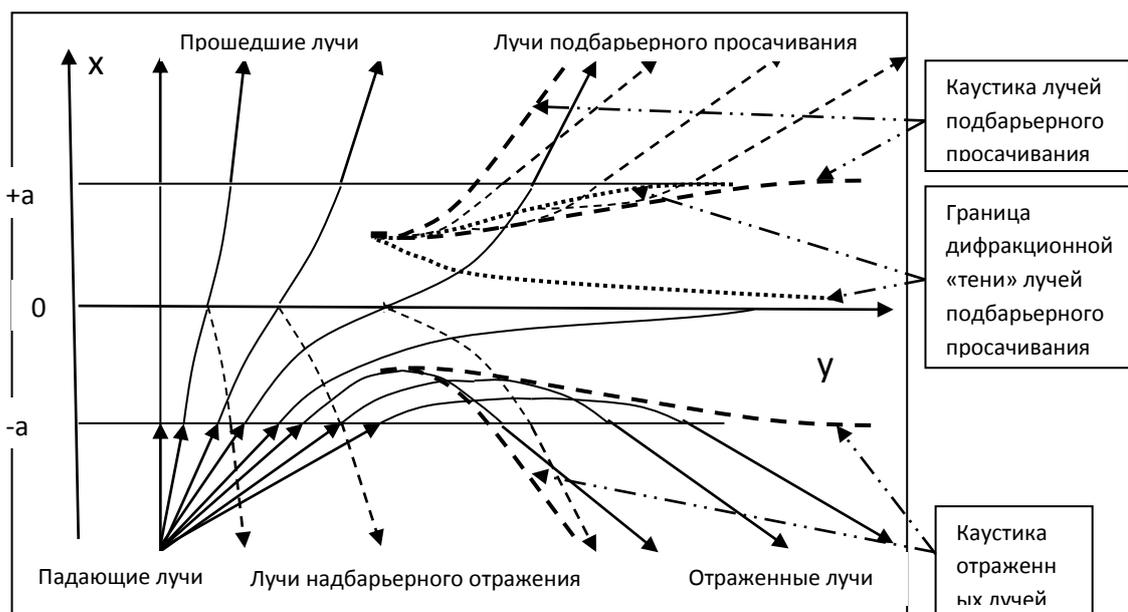


Рис. 2 Лучевая структура задачи о прохождении волны точечного источника через параболический плазменный слой $f_s > f_0$

Литература

1. Палкин Е.А., Петрович А.А. Расчет коэффициентов отражения и прохождения плоской волны для параболического ионосферного слоя на основе асимптотик точного решения. //II Всероссийская научная конференция «Современные проблемы дистанционного зондирования, радиолокации, распространения и дифракции» - «Муром 2018». Материалы конференции, Муром, 26 - 28 июня 2018 г. Секция 1. Теоретические и прикладные вопросы распространения и дифракции волн. С. 54 – 61.
2. Палкин Е.А., Петрович А.А. Специальные асимптотики функций параболического цилиндра (функций Вебера-Эрмита) с большим параметром. //Вестник Российского нового университета. Серия: «Сложные системы: модели, анализ и управление». – 2018. – вып. 1. С.18 – 27.
3. Oldham K.B., Myland J.C. Spanier J. An atlas of functions. Изд.2-е – Springer, 2008. – 748с.
4. Палкин Е.А., Петрович А.А. Специальные асимптотики функций Вебера-Эрмита и их применение в задачах распространения волн. //VII Всероссийские Армандовские чтения. Всероссийская научная конференция «Современные проблемы дистанционного зондирования, дифракции и распространения радиоволн». Материалы конференции, Муром, 27 - 29 июня 2017 г. Секция 1. Теоретические и прикладные вопросы распространения и дифракции радиоволн. С. 55 – 59.
5. Ипатов Е.Б., Крюковский А.С., Лукин Д.С., Палкин Е.А., Растягаев Д.В. Методы моделирования распространения электромагнитных волн в ионосфере с учетом распределений электронной концентрации и магнитного поля Земли. //Радиотехника и электроника, 2014, т.59, N12, С.1180-1187.
6. Лукин Д.С., Палкин Е.А., Ипатов Е.Б., Крюковский А.С., Растягаев Д.В. Развитие математического моделирования распространения радиоволн в ионосфере Земли на основе волновой теории катастроф и канонического оператора Маслова. //XXV Всероссийская открытая научная конференция «Распространение радиоволн», посвященная 80-летию отечественных ионосферных исследований (РРВ – 25). Труды конференции, Томск, 4 - 9 июля 2016 г. Том 1. Пленарные доклады. Секция 1. Распространение радиоволн и дистанционное зондирование верхней атмосферы и космического пространства. С. 40 – 50.