

Внутренний нелинейный резонанс в колебательной системе с двумя степенями свободы

Ю.В. Корниенко, Л.В. Стулова, Д.С. Масалов

*Институт радиофизики и электроники им. А.Я. Усикова НАН Украины,
Украина, 61085, г. Харьков, ул. Ак. Проскуры, 12, E-mail: milv@ire.kharkov.ua*

Рассмотрено поведение нелинейной динамической системы с двумя степенями свободы, в которой вся нелинейность представлена чисто нелинейной связью между степенями свободы. Рассмотрение проводится методом Крылова, Боголюбова и Митропольского в первом приближении. Полученное решение показывает как происходит периодическая перекачка энергии из одной степени свободы в другую. Полученный результат представляет интерес при исследовании внутренних нелинейных резонансов между степенями свободы в колебательной системе со многими степенями свободы и малой нелинейностью.

Behavior of a nonlinear dynamic system with two degrees of freedom, in which the whole nonlinearity is represented by a purely nonlinear connection between the degrees of freedom, is considered. The consideration is carried out by Krylov-Bogolyubov-Mitropolsky method in the first approach. The resulting solution shows how the periodic transfer of energy occurs between two degrees of freedom. The result obtained is of interest for the study of internal nonlinear resonances between the degrees of freedom in an oscillatory system with many degrees of freedom and a small nonlinearity.

Во многих задачах радиофизики и нелинейной оптики возникает необходимость найти решение волнового уравнения со слабой нелинейностью. Наиболее подходящим инструментом для этой цели является метод Крылова, Боголюбова и Митропольского (КБМ) [1], [2]. Проблема, однако, состоит в том, что этот метод исчерпывающе сформулирован только для обыкновенных дифференциальных уравнений. Результаты, полученные в работах, посвящённых распространению этого метода на случай волнового уравнения (например, [3]-[5]), относятся к ограниченному классу задач и не дают достаточно возможностей для радиофизики и нелинейной оптики. Поэтому возникает необходимость дальнейших исследований в этой области.

В качестве первого, простейшего шага в этом направлении, нами была выбрана типичная радиофизическая задача об электромагнитных колебаниях в объёмном резонаторе, заполненном диэлектриком со слабо нелинейной зависимостью вектора электрической поляризации от вектора напряжённости электрического поля. При её рассмотрении сразу стало ясно, что она требует внимательного отношения к возможности нелинейных резонансов между различными модами, которых нет в линейных колебательных системах. Эти резонансы мало чем отличаются от таких же резонансов в колебательных системах с конечным числом степеней свободы. Поэтому предварительное знакомство с этими резонансами удобнее проводить на системах с небольшим числом степеней свободы, например, равным 2.

Другая сторона вопроса связана со степенью сложности метода КБМ. В большинстве физических задач, исключая только задачи специального характера, для достижения практически необходимой точности бывает достаточно первого или второго приближения. В этих приближениях метод КБМ оказывается весьма простым и не требует сложных выкладок. Однако в некоторых случаях требуется решение в более высоких приближениях, и тогда проявляется тот факт, что сложность вычислений в методе КБМ нарастает с порядком приближения довольно быстро. Иногда требуются такие приближения, получить которые при ручной работе становится мало реальным. При нынешнем состоянии вычислительной техники это не создаёт больших проблем: просто вы-

полнение этих громоздких вычислений надо возложить на компьютер, используя систему компьютерной алгебры.

Такая работа была начата. В работе [6] описана созданная в ИРЭ НАНУ компьютерная программа в системе МАТНЕМАТИСА для решения методом КБМ дифференциального уравнения второго порядка с малой нелинейностью, описывающего колебания в системе с одной степенью свободы. Эта программа позволяет на современном персональном компьютере за приемлемое время, порядка 10 минут, решать уравнения наподобие уравнения ван дер Поля в двенадцатом приближении и выше. Однако для дальнейшего прогресса требуется новая программа с большими возможностями, в частности, способная получать решения для колебательных систем с многими степенями свободы в резонансном случае.

Тестировать такие программы надлежит на примере систем уравнений, описывающих хорошо изученные колебательные системы. Одна из таких колебательных систем, описанная ниже, была выбрана и тщательно исследована в первом приближении КБМ. Физические процессы в подобных системах исследовались давно [7] - [9], и нашей целью было исследование не физики процессов, а степени сложности вычислений и эффективности метода. Однако в ходе работы над задачей нам представилось, что открывшаяся картина может представить некоторый самостоятельный интерес для читателей-физиков. Это и послужило поводом для публикации данной статьи.

1. Описание колебательной системы

Колебательная система S_1 , подлежащая рассмотрению, состоит из двух подсистем, слабо связанных нелинейной связью (рис.1). Первая подсистема, электрическая, представляет собой обычный колебательный контур, составленный из катушки индуктивности L и конденсатора переменной ёмкости C , частота его собственных колебаний равна ω . Нижняя пластина этого конденсатора жёстко закреплена, а верхняя свободно подвешена на пружине и образует вместе с ней механическую колебательную систему с собственной частотой 2ω . Это вторая, механическая подсистема рассматриваемой системы. Связь между этими осцилляторами возникает из-за механической силы притяжения верхней пластины к нижней, пропорциональной квадрату электрического напряжения между пластинами. Эта сила воздействует на вторую подсистему и, поскольку содержит вторую гармонику, попадает в резонанс со второй подсистемой. Обратное воздействие второй подсистемы на первую связано с тем, что для раздвижения пластин конденсатора необходимо преодолеть силу притяжения и тем самым совершить работу, увеличивающую энергию электрических колебаний.

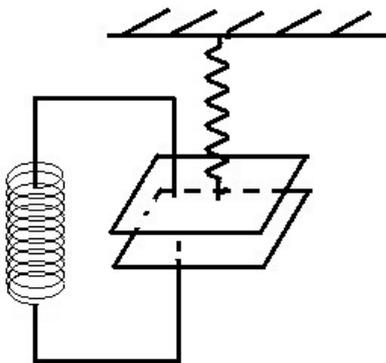


Рис. 1

Потери в системе отсутствуют, поэтому полная энергия колебаний в системе не меняется со временем.

Похожие колебательные системы рассматривались давно (например, [10]-[12]) и физические процессы в них хорошо изучены. В то же время подробного рассмотрения в точности такой системы найти в литературе не удалось, и это оправдывает данную работу.

2. Исходные уравнения.

Пусть u - мгновенное напряжение на конденсаторе в момент времени t , w - высота верхней пластины конденсатора над положением равновесия в тот же момент времени, ω - собственная частота контура при нулевом значении смещения, h - расстояние между пластинами в состоянии равновесия, S - площадь пластин конденсатора, m - масса верхней пластины конденсатора и

$$k = \frac{S}{2\pi} h^2 m, \quad \nu = \frac{\omega^2 w}{h}. \quad (1)$$

Тогда колебания в этой системе описываются системой уравнений

$$\ddot{u} + \omega^2 \left(1 + \frac{\nu}{\omega^2} \right) u = 0, \quad (2)$$

$$\ddot{v} + 4\omega^2 v = -k u^2, \quad (3)$$

где точка означает дифференцирование по времени t . Эта система является нелинейной из-за присутствия в ней членов $u v$ и $k u^2$. При малых u и v нелинейные члены будут малы по сравнению с линейными, и систему для дальнейшего рассмотрения удобно преобразовать следующим образом. Заменяя u и v на εu и εv соответственно, перенося нелинейный член в (2) в правую часть и сокращая оба уравнения на ε , получим

$$\ddot{u} + \omega^2 u = -\varepsilon u v, \quad (4)$$

$$\ddot{v} + 4\omega^2 v = -\varepsilon k u^2, \quad (5)$$

где ε - малый параметр, т.е. бесконечно малая величина, по которой будем искать асимптотику решения до заданного порядка включительно.

3. Постановка задачи.

Вообще, задача ставится так: найти асимптотическое решение системы уравнений (4), (5) в n -ом приближении по ε методом КБМ для произвольного n , значение которого практически ограничено только возможностями применяемого компьютера. В рамках данной работы ставится задача отыскания только первого приближения, поскольку работу предполагается выполнять вручную. Требуется получить уравнения для медленно меняющихся амплитуд и фаз. Затем требуется проанализировать полученный результат на предмет согласия его с физической картиной процессов, протекающих в рассматриваемой системе.

4. Применение метода КБМ.

В соответствии с [1] представим приближённое решение системы уравнений (4), (5) в первом приближении в виде

$$u(t) = a(t) \cos(\omega t + \varphi(t)) + \dots, \quad (6)$$

$$v(t) = b(t) \cos(2\omega t + \psi(t)) + \dots, \quad (7)$$

где $a(t)$, $b(t)$, $\varphi(t)$, $\psi(t)$ - медленно меняющиеся функции, удовлетворяющие уравнениям

$$\dot{a} = \varepsilon \mathbf{A}(a, b, \varphi, \psi), \quad (8)$$

$$\dot{b} = \varepsilon \mathbf{B}(a, b, \varphi, \psi), \quad (9)$$

$$\dot{\varphi} = \varepsilon \mathbf{C}(a, b, \varphi, \psi), \quad (10)$$

$$\dot{\psi} = \varepsilon \mathbf{D}(a, b, \varphi, \psi). \quad (11)$$

Подставляя (6), (7) в уравнения (4), (5) и заменяя каждый раз возникающие производные от a , b , φ , ψ по формулам (8)-(11), затем приравнявая слева и справа коэффициенты при одинаковых степенях ε , получим явные выражения для \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} , \mathbf{D} и систему уравнений (8)-(11) в явном виде

$$\dot{\varphi} = \frac{\varepsilon b}{4\omega} \cos(\psi - 2\varphi), \quad (12)$$

$$\dot{\psi} = \frac{k \varepsilon a^2}{8\omega b} \cos(\psi - 2\varphi), \quad (13)$$

$$\dot{a} = -\frac{\varepsilon a b}{4\omega} \sin(\psi - 2\varphi), \quad (14)$$

$$\dot{b} = \frac{k \varepsilon a^2}{8\omega} \sin(\psi - 2\varphi). \quad (15)$$

Эта система уравнений является удобным объектом для поиска аналитических решений, качественного анализа и численного счёта. Чтобы её рассмотрение сделать более удобным, с помощью замены

$$A = \frac{\sqrt{k} \varepsilon}{4\omega\sqrt{2}} a; \quad B = \frac{b}{4\omega}; \quad \tau = \varepsilon t \quad (16)$$

приведём её к виду

$$\varphi' = B \cos(\psi - 2\varphi), \quad (17)$$

$$\psi' = \frac{A^2}{B} \cos(\psi - 2\varphi), \quad (18)$$

$$A' = -A \cdot B \sin(\psi - 2\varphi), \quad (19)$$

$$B' = A^2 \sin(\psi - 2\varphi), \quad (20)$$

где штрих означает дифференцирование по τ .

5. Частное решение.

Рассмотрим одно частное решение, просто и наглядно иллюстрирующее характер процессов, происходящих в нашей динамической системе. Пусть в некоторый момент времени

$$\cos(\psi - 2\varphi) = 0. \quad (21)$$

Тогда производные от φ и ψ равны нулю, и равенство (21) остаётся в силе всё время. Тогда $\sin(\psi - 2\varphi) \equiv 1$ или -1 (эти случаи приводятся друг к другу заменой τ на $-\tau$), и система (12)-(15) приводится к виду

$$A' = -A \cdot B, \quad (22)$$

$$B' = A^2, \quad (23)$$

где A и B определяются заменой (16), штрих означает дифференцирование по τ .

Эта система легко решается в квадратурах, о чём пойдёт речь в п.6. Здесь только заметим, что, умножая (22) на A и (23) на B , а затем складывая полученные равенства, прийдём к выводу, что величина

$$E = A^2 + B^2 \quad (24)$$

не изменяется со временем, что выражает закон сохранения энергии в нашей колебательной системе S_1 . Здесь первое слагаемое - энергия, запасённая в контуре, а второе - в механическом осцилляторе. Уже отсюда можно заключить, что эволюция системы состоит в перекачке энергии из одной подсистемы в другую. Как это конкретно происходит, рассмотрено в следующих параграфах.

6. Физический смысл полученного решения.

Итак мы видим, что $A(\tau)$ экспоненциально стремится к нулю при $\tau \rightarrow \pm\infty$, имеет единственный экстремум при $\tau = 0$ и нигде на оси времени не меняет знака и не обращается в ноль. Из (22)-(23) видно, что $B(\tau)$ является монотонной функцией, изменяется от 1 до -1 на интервале τ от $-\infty$ до $+\infty$ и обращается в нуль при $\tau = 0$. (В дальнейшем будем считать $\tau_0 = 0$.)

Картина, описанная здесь и показанная на рис. 2а и рис. 2б, имеет следующий физический смысл. При больших отрицательных τ вся энергия колебательной системы сосредоточена в механическом осцилляторе ($A \rightarrow 0$). Состояние системы с $A = 0$, как видно из уравнения (22), будет сохраняться неограниченно долго, однако является неустойчивым, и как угодно малое ненулевое A со временем нарастает. Точно так же при больших положительных τ малое A со временем экспоненциально убывает, стремясь к нулю. Таким образом, при изменении τ от $-\infty$ до 0 происходит перекачка энергии из механического осциллятора в колебательный контур с соответствующим увеличением A и уменьшением B . При $\tau = 0$ A достигает максимума, а $B = 0$, то есть вся энергия сосредоточена в колебательном контуре. В дальнейшем события разворачиваются в обратном порядке, и при $\tau = +\infty$ вся энергия опять сосредоточена в механическом осцилляторе. Это является конечным состоянием системы. Оно отличается от начального состояния при $\tau = -\infty$ только разностью фаз колебаний в подсистемах. Она меняется на π при $\tau = 0$.

Нетрудно заметить, что здесь мы имеем дело с хорошо известным параметрическим резонансом. Отличие данной колебательной системы от многих других похожих, рассмотренных в литературе, состоит в том, что контур возбуждается параметрически под влиянием не внешней, а внутренней силы. Поэтому при $\tau = 0$, когда энергия источника иссякает, параметрическая раскачка контура прекращается и сменяется параметрическим гашением электрических колебаний.

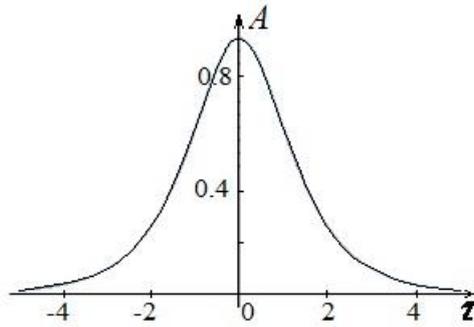


Рис. 2а

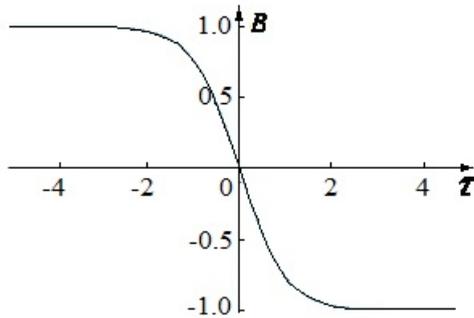


Рис. 2б

Похожая система, состоящая из двух контуров, связанных через диод, рассмотрена, например, в [12]. Однако в ней связь содержит линейную составляющую. В нашей же системе связь является чисто нелинейной, т.е. исчезает при стремлении полной энергии колебаний к нулю. Это имеет значение в свете целей данной работы, изложенных в преамбуле.

7. Фазовое пространство.

В общем случае замена переменных (16), дополненная равенством

$$\Theta = \psi - 2\varphi , \quad (25)$$

приводит систему уравнений (17)-(20) к системе уравнений

$$A' = -A \cdot B \cdot \sin \Theta , \quad (26)$$

$$B' = A^2 \cdot \sin \Theta , \quad (27)$$

$$\Theta' = \frac{A^2 - 2B^2}{B} \cdot \cos \Theta , \quad (28)$$

Для неё остаётся в силе закон сохранения (24). Кроме того, она обладает масштабной симметрией: замена $A \rightarrow \lambda A$, $B \rightarrow \lambda B$, $\tau \rightarrow \tau/\lambda$ оставляет эту систему неизменной. Поэтому при её рассмотрении ограничимся случаем $E = 1$. Поскольку в (26) – (28) время явно не входит, система также однородна во времени, т.е. инвариантна относительно замены $\tau \rightarrow \tau + T$.

Уравнения (27), (28) можно рассматривать как уравнения движения новой динамической системы S_2 с одной степенью свободы и динамическими переменными B и Θ . Разделив (27) на (28), получим уравнение фазовых траекторий этой системы

$$\frac{dB}{d\Theta} = \frac{(1-B^2)B}{1-3B^2} \operatorname{tg}\Theta. \quad (29)$$

Анализ уравнений (27), (28), (29) показывает, что двумерное фазовое пространство динамической системы S_2 топологически эквивалентно сфере (рис. 3а), состоящей из верхней полусферы s_1 и нижней полусферы s_2 , разделённых экватором $abcd$ (рис. 3а). Эти полусферы конгруэнтны, и мы будем рассматривать только одну из них, верхнюю. Отрезок eo_1f является координатной осью B , на которой B изменяется от -1 (в точке e) до $+1$ (в точке f). Ту же роль на полупространстве s_2 играет отрезок eo_2f . Координатной осью Θ является контур $o_1go_2ho_1$, на котором Θ проходит через значения соответственно 0 (верхняя ось B), $\pi/2$ (экватор), $\pm\pi$ (нижняя ось B), $3\pi/2$ или $-1/2\pi$ (экватор), 2π (это значение эквивалентно значению 0). Экватор состоит из четырёх открытых отрезков ab , bc , cd и da и четырёх особых точек равновесия a , b , c и d . Каждый из этих отрезков является полной траекторией, проходимой системой за время от $\tau = -\infty$ до $\tau = +\infty$. Примером может служить траектория, рассмотренная в п. 6. Система совершает замкнутый виток по экватору за четыре бесконечных интервала времени $(-\infty, +\infty)$.

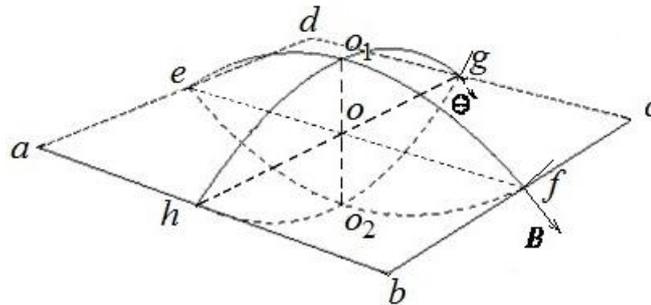


Рис. 3а Фазовое пространство системы с изображенными в нем сепаратрисами

Система S_2 имеет также ещё четыре точки равновесия F_1, F_2, F_3, F_4 . Это точки безразличного равновесия, окружённые семейством замкнутых траекторий (фокусы). Система по этим траекториям вращается против часовой стрелки вокруг фокусов F_1, F_2 (в верхнем полупространстве) и по часовой стрелке вокруг F_3, F_4 (в нижнем полупространстве). Это же направление имеет и движение системы по сепаратрисам $abcd$.

Контур $o_1go_2ho_1$ является особым: на нём соприкасаются два противоположных пучка траекторий. Состояния, которые представляют точки этого контура, являются особыми, т.к. в уравнении движения (18) B , равное нулю, входит в знаменатель. Если принести математическую строгость в жертву наглядности, можно сказать, что на этом контуре скорость движения системы равна бесконечности, и попытка привести систему в состояние, изображаемое точкой этого контура, приводит к мгновенному переходу её в состояние g или h (какое ближе).

8. Осциллирующие решения.

Решение для траектории cgd , рассмотренное выше, не является случайно выбранным частным случаем. Оно является предельным случаем целого класса осциллирующих решений, который мы сейчас рассмотрим.

Рассмотрение следует начать с малых колебаний, возникающих в окрестностях точек безразличного равновесия F_1, F_2, F_3, F_4 . Малость колебаний позволяет ограничить рассмотрение системы (26)-(28) линейным приближением. В этом приближении система (26)-(28) принимает вид

$$B' = -\frac{2}{3}\Theta, \quad (30)$$

$$\Theta' = 6B. \quad (31)$$

Её решением являются синусоидальные колебания

$$B = C_1 \cos(2\tau), \quad \Theta = C_2 \sin(2\tau). \quad (32)$$

Система (27)-(28) решается аналитически. Разделив (27) на (28), получим уравнение (29), связывающее B и Θ . Разделяя переменные B и Θ , получим

$$\frac{1-3B^2}{1-B^2} \frac{dB}{B} = \operatorname{tg} \Theta d\Theta \quad (33)$$

или

$$\left(1 - \frac{2B^2}{1-B^2}\right) \frac{dB}{B} = \operatorname{tg} \Theta d\Theta, \quad (34)$$

откуда

$$\ln B + \ln(1-B^2) = -\ln \cos \Theta + \ln C \quad (35)$$

или

$$\frac{C}{\cos \Theta} = B(1-B^2). \quad (36)$$

При стремлении траектории к фокусу время τ прохождения системой замкнутого пути стремится к 2π . По мере удаления траектории от фокуса это время возрастает и стремится к бесконечности, когда траектория стремится к сепаратрисе $abcd$.

Зависимость B и Θ от времени τ в этой области фазового пространства показана на рис. 3б, если смотреть со стороны полусферы s_2 .

9. Общая картина поведения колебательной системы.

В свете всего сказанного вырисовывается следующая картина поведения исследуемой колебательной системы. Её мгновенное состояние характеризуется тремя переменными: амплитудой электрических колебаний A , амплитудой механических колебаний B и сдвигом фаз между этими колебаниями Θ . При равенстве одной из амплитуд нулю значение Θ не определено.

При нулевой энергии системы ($E = 0$) обе амплитуды тождественно равны нулю. Если в начальный момент времени $A = 0, B \neq 0$ (имеют место только механические колебания), то такое состояние системы при отсутствии внешних воздействий сохраняет-

ся неограниченно долго. Однако оно является неустойчивым, и малейшее внешнее воздействие может вывести систему из этого состояния. Когда вся энергия, наоборот, сосредоточена в колебательном контуре, т.е. $A \neq 0$, $B = 0$, развитие событий зависит от значения C . Если $\Theta = \pm\pi/2$, оно сохраняет это значение со временем, и происходит монотонная перекачка энергии из колебательного контура в механический осциллятор (скорость этой перекачки пропорциональна квадрату амплитуды колебаний и стремится к 0 при стремлении амплитуды колебаний к 0. Этим данная система отличается от систем с ненулевым коэффициентом связи, как например (работа, где связь через диод)), в результате чего $A \rightarrow 0$ при $\tau \rightarrow \pm\infty$. Если же Θ в начальный момент времени отлично от $\pm\pi/2$, убывание A до нуля происходит за конечное время, и начинается стадия его возрастания, в результате чего решение приобретает периодический характер. Период этого процесса зависит от параметра C ; при уменьшении C до нуля период возрастает до бесконечности, и решение становится непериодическим, описанным выше.

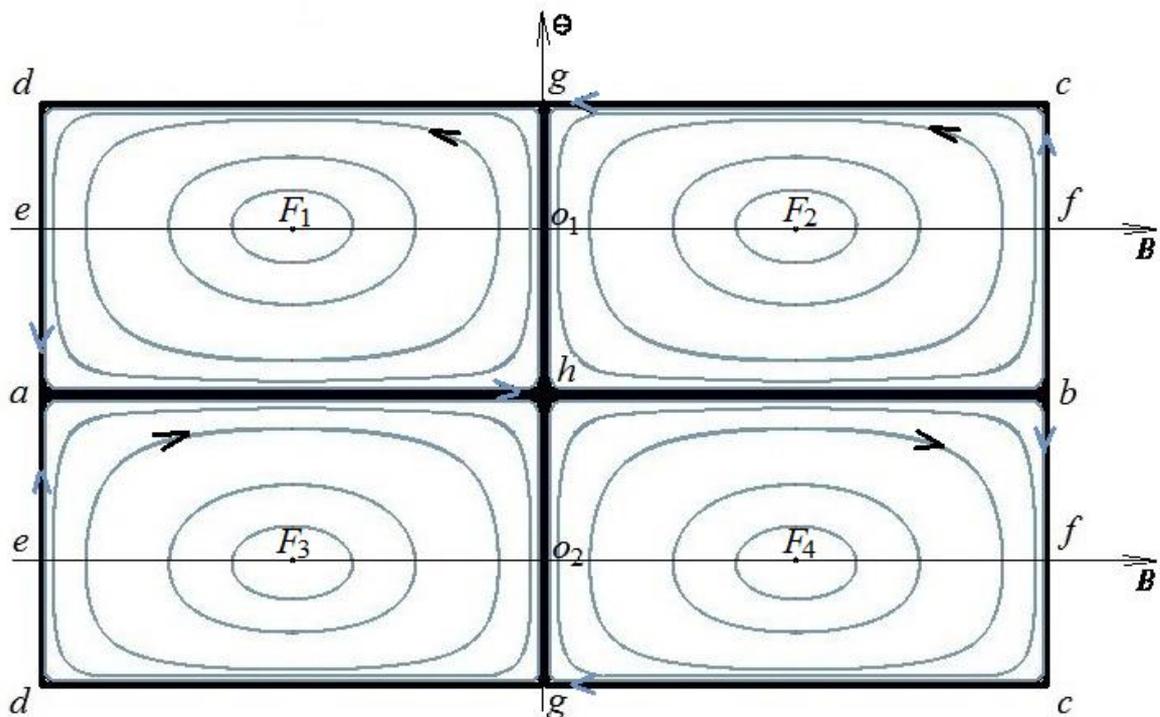


Рис. 36. Разрезанное фазовое пространство по линии $abcda$

Заключение.

Связь между различными степенями свободы колебательной системы встречается часто, например, в случае слабо связанных колебательных контуров или резонаторов. Чаще приходится встречаться с линейной связью, величина которой не зависит от амплитуды колебаний. Достаточно часто встречаются случаи нелинейной связи, величина которой зависит от амплитуды колебаний. Пример такой системы рассмотрен в [11]. Намного реже встречаются системы с чисто нелинейной связью, исчезающей при стремлении амплитуды колебаний к нулю. Пример такой системы и рассмотрен в данной статье.

Эта система послужит тестовым примером при разработке программ, реализующих метод КБМ.

Литература

1. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. - М.: ГИФМЛ, 1958. - 408 с.
2. Митропольский, Ю.А. Нестационарные процессы в нелинейных колебательных системах. - Киев: Изд. АН УССР, 1955. - 284 с.
3. Корнієнко, Ю.В. Побудова асимптотичного розв'язку хвильового рівняння з малою нелінійністю для хвилевода; представив ак. АН УРСР Ю. О. Митропольський // Доповіді АН УРСР. - 1962. - № 7. - С. 845-850.
4. Митропольский Ю.А., Мосеєнков Б.И. Асимптотические решения уравнений в частных производных / Вища школа, 1976. – 592 с.
5. Мосеєнков, Б. І. // Наукові студентські праці Київського держ. ун-ту. Математика. - 1955. - Т. 16. - С. 49.
6. Корниенко Ю.В., Масалов Д.С. Реализация метода Крылова-Боголюбова-Митропольского в системе компьютерной алгебры // Физические основы приборостроения (Россия), 2014. – Т.3. - № 1. – С. 70-83
7. Мандельштам Л.И. Полное собрание трудов / АН СССР, 1955. – 512 с.
8. Горелик Г.С. Колебания и волны. – М.: Физматгиз, 1959.
9. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. – М.: Наука, 1981.
10. Теория колебаний: Конспект лекций / Ю.М. Заболотнов; Самар. гос. аэрокосм. ун-т. Самара, 1999. – 168 с.
11. Алдошин Г.П., Яковлев С.П. Динамика качающейся пружины // Вестн. СПбГУ, Сер. 1, вып.4, 2012, с. 45-52.
12. Рабинович М.И., Трубецков Д.И. Введение в теорию колебаний и волн. – НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2000. – 560 с. (<http://www.iapras.ru/biblio/new/vvedtkv.pdf>)