

### **Частотно-временной анализ радиозатменных сигналов**

М.Е.Горбунов<sup>1,2</sup>, О.А.Доловова<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Институт физики атмосферы им. А.М. Обухова РАН,  
119017, Москва, Пыжевский пер., д. 3  
E-mail: [gorbunov@ifaran.ru](mailto:gorbunov@ifaran.ru)*

<sup>2</sup> *Гидрометцентр России,  
123242, Москва, Б. Предтеченский пер., 11-13*

*Частотно-временной анализ играет важную роль в анализе радиозатменных наблюдений в многолучевых зонах. Простейшая схема частотно-временного анализа основана на Фурье-анализе сигнала в скользящих апертурах. Более высокого разрешения удастся добиться при использовании лучевой плотности Вигнера. Другим вариантом квантовой плотности является функция распределения Кирквуда, которая отличается простотой вычисления. Дальнейшие варианты лучевых плотностей можно строить на основе дробного преобразования Фурье. Дробное преобразование Фурье реализует вращение фазового пространства. Мы рассматриваем функцию распределения Кирквуда, усредненную по группе вращений, и показываем, что она равна функции распределения Вигнера, свернутой со сглаживающим ядром. Мы анализируем преимущества сглаженной функции Вигнера и приводим примеры обработки натурных радиозатменных измерений.*

*Ключевые слова: радиозатменное зондирование, многолучевое распространение, частотно-временной анализ, плотность Вигнера, плотность Кирквуда.*

### **Time-frequency analysis of radio occultation signals**

M.E.Gorbunov<sup>1,2</sup>, O.A.Dolovova<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *A.M. Obukhov Institute of Atmospheric Physics RAS.*

<sup>2</sup> *Russian Hydrometcenter.*

*Time-frequency analysis plays a significant role in the analysis of radio occultation (RO) measurements in multipath zones. The measured complex signal is divided by the reference signal, evaluated for a climatological atmospheric model, in order to correct for the regular wave front curvature. A higher resolution can be achieved by using Wigner Distribution Function (WDF). Another quantum density is Kirkwood Distribution Function, whose evaluation requires very low computational costs. Further variants of ray densities can be constructed on the basis of Fractional Fourier Transform (FrFT). FrFT implements phase space rotations. We consider KDF averaged over the rotation group, which equal WDF convolved with a smoothing kernel. We analyze the advantages of smoothed WDF and give examples of processing real RO observations.*

*Keywords: radio occultation, multipath propagation, time-frequency analysis, Wigner distribution function, Kirkwood distribution function.*

### **Радиоголографический анализ радиозатменных данных**

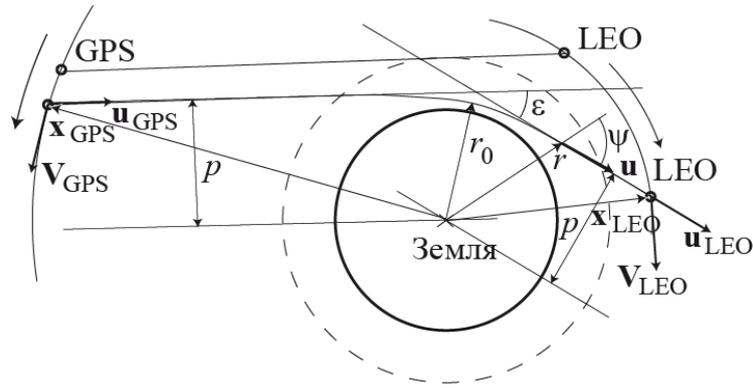


Рис. 1. Геометрия радиозатменного эксперимента.

Геометрия радиозатменного эксперимента показана на Рис. 1. Передатчик расположен на спутнике GPS (или другой системы спутниковой навигации) с координатами  $\mathbf{x}_{GPS}$  и скоростью  $\mathbf{V}_{GPS}$ . Приемник расположен на низкоорбитальном спутнике (Low-Earth Orbiter, LEO) с координатами  $\mathbf{x}_{LEO}$  и скоростью  $\mathbf{V}_{LEO}$ . Луч рефрагирует в земной атмосфере и меняет направление с исходного  $\mathbf{u}_{GPS}$  на конечное  $\mathbf{u}_{LEO}$ . Угол между этими направлениями является углом рефракции  $\epsilon$ , рассматриваемым как функция прицельного расстояния луча  $p$  относительно центра локальной кривизны поверхности Земли. Зависимость  $\epsilon(p)$  вычисляется на начальном этапе обработки радиозатменных данных и является входной величиной для различных алгоритмов обращения, позволяющих восстанавливать вертикальный профиль показателя преломления  $n(r)$  и метеопараметры (температура, давление, удельная влажность), от которых зависит показатель преломления на частотах систем спутниковой навигации [1].

В радиозатменных экспериментах измеряются амплитуды  $A_{1,2}(t)$  и фазовые задержки  $\Psi_{1,2}(t)$  в двух частотных каналах. Принимаемый комплексный сигнал можно записать как  $u_{1,2}(t) = A_{1,2}(t) \exp(ik\Psi_{1,2}(t))$ , где  $k = 2\pi/\lambda$  – волновое число,  $\lambda$  – длина волны. Измерения в двух каналах используются для удаления вклада ионосферы [2].

Простейший метод вычисления угла рефракции  $\epsilon$  и прицельного параметра  $p$  основан на их связи с орбитальными данными и доплеровской частотой измеряемого сигнала. Этот метод применим лишь при условии однолучевого распространения. Однако при распространении волны на трассе космос – нижняя тропосфера – космос типичной является ситуация многолучевого распространения, проиллюстрированная на Рис. 2. В данном примере в момент времени  $t_1$  наблюдается один луч, а в момент времени  $t_2$  – три луча. В лучевом пространстве с координатами  $\epsilon, p$ , каждый момент времени соответствует множеству виртуальных лучей со всеми возможными направлениями прихода. Эти множества описываются зависимостями  $\epsilon_G(t, p)$ , которые приближенно можно считать прямыми с наклоном, равным обратному приведенному расстоянию наблюдения. Пересечения этих линий с графиком фактической зависимости  $\epsilon(p)$  соответствуют наблюдаемым лучам. Лучи могут быть, как прямыми, так и отраженными. Луч, касающийся поверхности Земли, имеет прицельный параметр  $p_E$ . Ветвь зависимости  $\epsilon(p)$  при  $p < p_E$ , соответствующая отраженным лучам, показана на рисунке пунктиром.

В однолучевой зоне принимаемый сигнал является квазимонохроматическим, т.е. его амплитуда и фазовая задержка мало меняются за характерный период колебаний. В многолучевой зоне принимаемый сигнал является суперпозицией квазимонохроматических сигналов, соответствующим интерферирующим лучам.

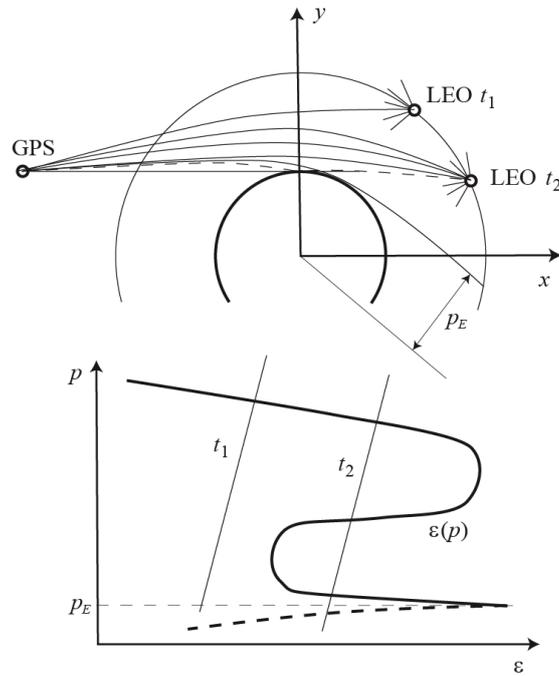


Рис. 2. Геометрия многолучевого распространения.

Идея радиолографического анализа радиозатменных сигналов [3–8] проиллюстрирована на Рис. 3. Исходный комплексный сигнал  $u(t)$  делится на опорный сигнал  $u_R(t)$ , который вычисляется для климатологической модели атмосферы и заданной геометрии наблюдений. Далее выполняется Фурье-анализ нормированного сигнала  $u(t)/u_R(t)$  в скользящих апертурах, сцентрированных вокруг разных моментов времени  $t$ . Оптимальный размер скользящей апертуры соответствует размеру зоны Френеля [166]. Абсолютные величины скользящих спектров  $|\tilde{u}(t, \omega)|$  (спектрограмму) можно визуализировать как в координатах  $(t, \omega)$ , так и на лучевой плоскости в координатах  $(\epsilon, p)$ . В последнем случае  $|\tilde{u}(t, \omega)|$  строятся вдоль линий  $\epsilon_G(t, p)$ , покрывающих всю плоскость. При этом используется тот факт, что координаты  $(t, \omega)$  можно пересчитывать в  $(\epsilon, p)$ , пользуясь тем, что угол рефракции и прицельный параметр можно вычислить по орбитальным данным и доплеровскому сдвигу частоты. Таким образом получается двумерное распределение  $|\tilde{u}(\epsilon, p)|$ , имеющее максимум в окрестности лучевого многообразия. Для улучшения разрешения радиолографического анализа было предложено использовать технику переназначения (re-assignment) [9].

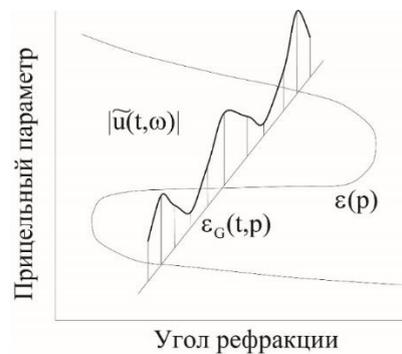
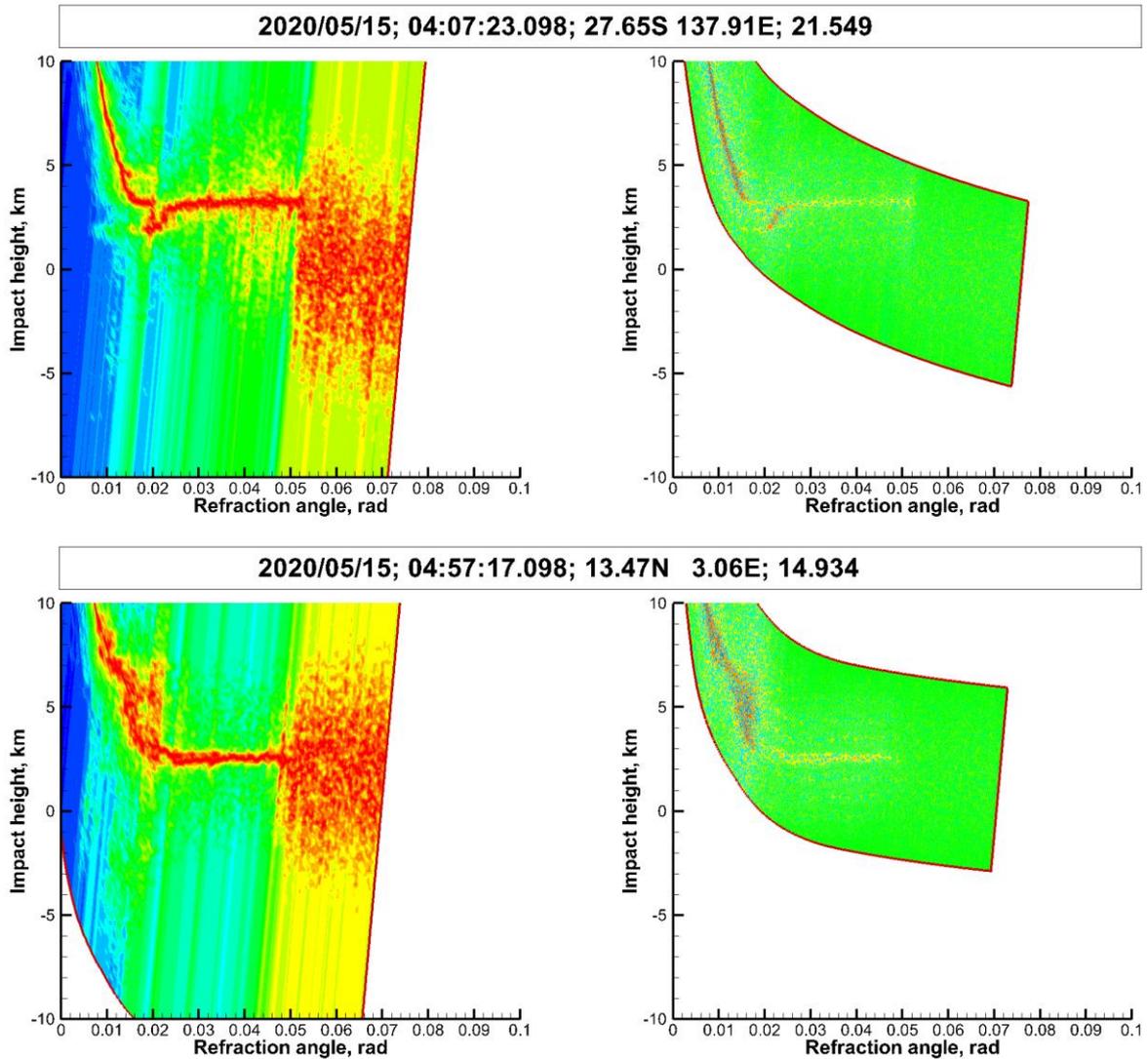


Рис. 3. Геометрия радиолографического анализа радиозатменных данных.



**Рис. 4.** Два примера частотно-временного анализа наблюдений радиозатменного эксперимента COSMIC-2. Слева: радиоголографические спектры, справа: функция Вигнера.

### Функция распределения Вигнера

Функция распределения (квантовая или лучевая плотность) Вигнера (Wigner Distribution Function, WDF) была изначально введена в квантовой механике, но в дальнейшем получила применения в анализе осциллирующих, в частности радиозатменных сигналов [1,10,11]. Для сигнала, являющегося функцией времени, Функция Вигнера имеет следующий вид:

$$\rho^W(t, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int u\left(t - \frac{\tau}{2}\right) u^*\left(t + \frac{\tau}{2}\right) \exp(i\tau\omega) d\tau. \quad (1)$$

Примеры сравнения радиоголографических спектров с функцией Вигнера приведены на **Рис. 4**. Обработаны глубокие радиозаходы с сильными пиками угла рефракции, вызванными тонкими слоями влажности. Примеры демонстрируют высокое разрешение, достигаемое функцией Вигнера.

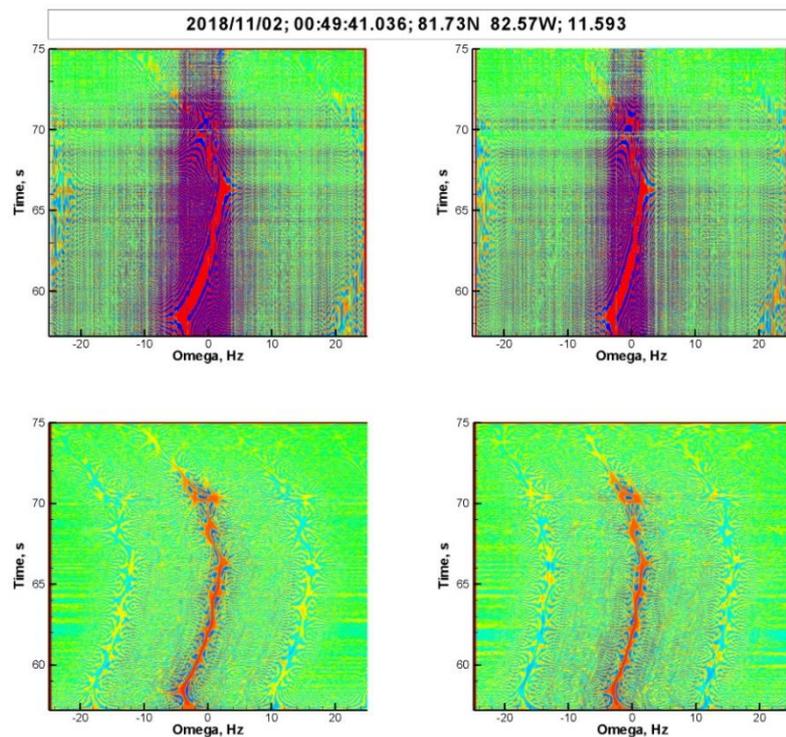
### Функция Кирквуда

Функция Кирквуда (Kirkwood Distribution Function KDF), также появившаяся в квантовой механике, менее известна, чем функция Вигнера. Ее отличает простота вычисления:

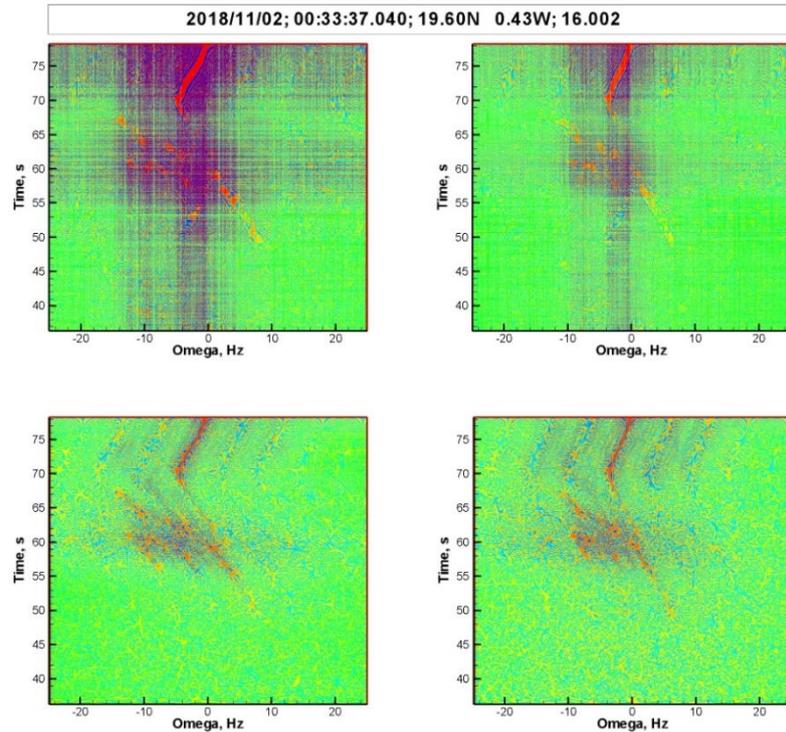
$$\rho^K(t, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int u(t)u^*(t + \tau) \exp(i\tau\omega) d\tau = u(t)\tilde{u}^*(\omega) \exp(-it\omega). \quad (2)$$

Если для вычисления функции Вигнера необходимо вычислять Фурье-преобразование для каждого значения частоты, то функция Кирквуда требует единственного вычисления Фурье-преобразования.

Применение функции Кирквуда для анализа радиозатменных данных было предложено в [12]. Примеры сравнения функций Кирквуда и Вигнера для данных радиозатменного эксперимента, проведенного компанией Spire, приводятся на **Рис. 5** и **Рис. 6**. На графиках функции Кирквуда видна «сетчатая» структура, связанная с вычислением прямого произведения сигнала и его Фурье-образа. В отличие от функции Вигнера, имеющей ярко выраженный максимум в окрестности лучевого многообразия, функция Кирквуда имеет там точки стационарной фазы. Тем не менее, функция Кирквуда позволяет увидеть многолучевые зоны, в которых проекция лучевого многообразия на ось времени становится многозначной.



**Рис. 5.** Пример вычисления функций Кирквуда и Вигнера в координатах  $(t, \omega)$  для сеанса наблюдений эксперимента Spire. Сверху: функция Кирквуда, снизу: функция Вигнера. Слева: канал L1, справа: канал L2.



**Рис. 6. Пример вычисления функций Кирквуда и Вигнера в координатах  $(t, \omega)$  для сеанса наблюдений эксперимента Spire. Сверху: функция Кирквуда, снизу: функция Вигнера. Слева: канал L1, справа: канал L2.**

### Дробное преобразование Фурье и распределения в фазовом пространстве

Дальнейшее развитие методов частотно-временного анализа связано с вычислением сглаженных распределений методом усреднения по группе вращений фазового пространства [13–15]. Вращения фазового пространства реализуются дробным преобразованием Фурье:

$$\hat{F}_\alpha u(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi i \sin \alpha}} \int \exp\left(i \frac{t^2 \cos \alpha - 2t\tau + \tau^2 \cos \alpha}{2 \sin \alpha}\right) u(\tau) d\tau, \quad (3)$$

где  $\alpha$  – угол поворота. При  $\alpha = \pi/2$  этот оператора переходит в обычное Фурье-преобразование, а при  $\alpha \rightarrow 0$  он стремится к единичному оператору.

Идея метода усреднения по группе вращений заключается в том, чтобы усреднить функцию Кирквуда, рассчитанную для  $\hat{F}_\alpha u(t)$  при разных углах  $\alpha$  от 0 до  $2\pi$  и пересчитанную в исходные координаты фазового пространства. Несложно показать, что для усреднения достаточно выбрать интервал углов от 0 до  $\pi/2$ . Усредненная функция Кирквуда равна функции Вигнера, свернутой со сглаживающим ядром.

Результаты вычисления сглаженной функции Вигнера для наблюдений эксперимента COSMIC-2 приведены на **Рис. 7–Рис. 10**. Сглаженная функция Вигнера дает менее детальную информацию, но позволяет гораздо четче визуализировать лучевое многообразие.

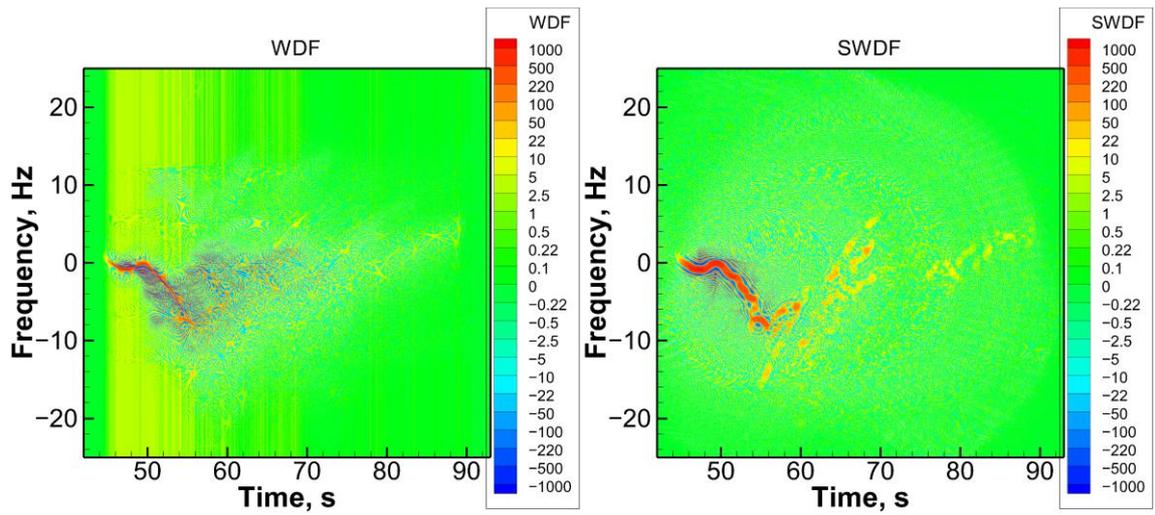


Рис. 7. Пример вычисления функции Вигнера (WDF) и сглаженной функции Вигнера (SWDF) для сеанса наблюдений эксперимента COSMIC-2.

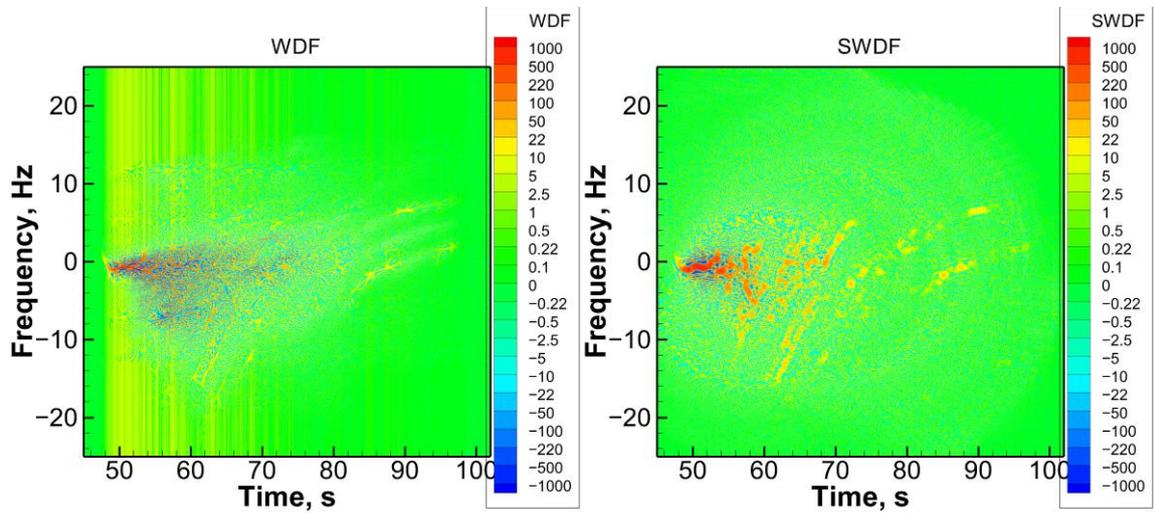


Рис. 8. Пример вычисления функции Вигнера (WDF) и сглаженной функции Вигнера (SWDF) для сеанса наблюдений эксперимента COSMIC-2.

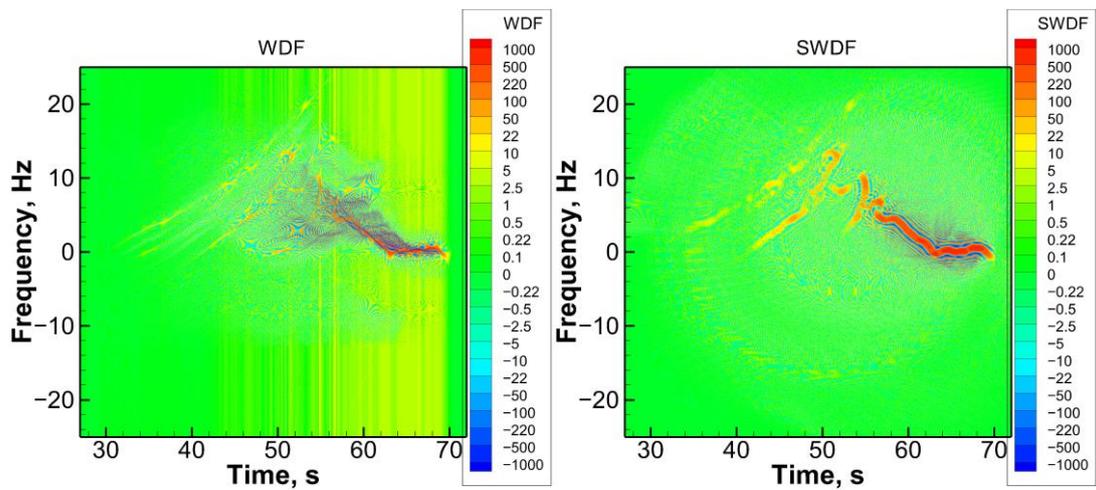


Рис. 9. Пример вычисления функции Вигнера (WDF) и сглаженной функции Вигнера (SWDF) для сеанса наблюдений эксперимента COSMIC-2.

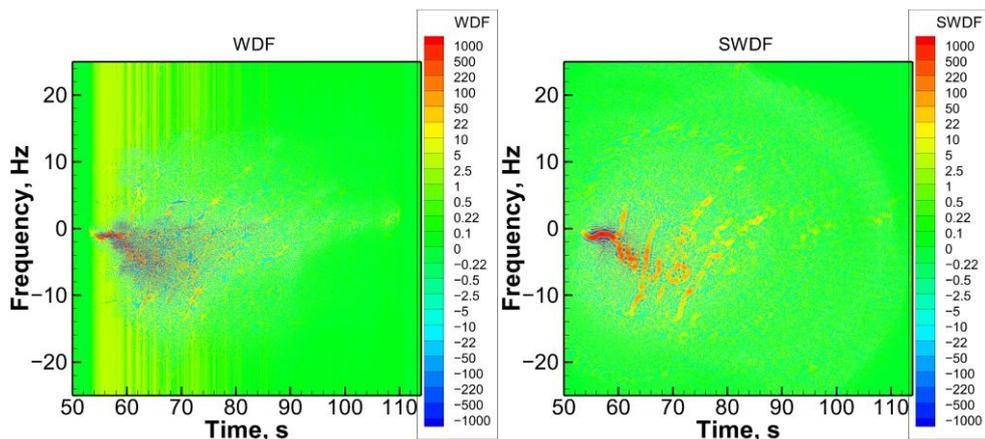


Рис. 10. Пример вычисления функции Вигнера (WDF) и сглаженной функции Вигнера (SWDF) для сеанса наблюдений эксперимента COSMIC-2.

### Заключение

Частотно-временной анализ позволяет развернуть одномерный сигнал в двумерном фазовом пространстве, в котором координатами являются время и мгновенная частота. Частотно-временной анализ наиболее эффективен для сигналов, которые можно представить как суперпозицию квазимонохроматических компонент. Для каждой такой компоненты по отдельности легко определяется мгновенная частота. Однако выделение квазимонохроматических компонент из смешанного сигнала является, вообще говоря, непростой задачей. Радиозатменный сигнал можно представить как суперпозицию сигналов, соответствующих принимаемым лучам. Для этого сигнала вводится понятие лучевого многообразия, которое является непрерывной линией без самопересечений в фазовом пространстве. Определение структуры лучевого многообразия является необходимым этапом решения обратной задачи радиопросвечивания атмосферы.

В данном обзоре мы рассмотрели различные подходы к частотно-временному анализу радиозатменных сигналов: 1) спектрограмма, 2) функция Вигнера, 3) функция Кирквуда, 4) сглаженная функция Вигнера. Фундаментальным ограничением всех этих методов является соотношение неопределенности. Однако его проявления в различных подходах различны. В одних случаях оно определяет размытие максимума распределения в фазовом пространстве (спектрограмма, функция Кирквуда и сглаженная функция Вигнера), в других он определяет характерных масштаб осцилляций распределения (функция Вигнера).

Сглаженная функция Вигнера вводится как усреднение функции Кирквуда по группе вращений фазовой плоскости, реализуемой дробным преобразованием Фурье. Этот тип распределения обладает рядом преимуществ по сравнению, как со спектрограммой, так и с функцией Вигнера. По сравнению со спектрограммой ее преимуществом является отсутствие выделенного направления на фазовой плоскости. По сравнению с функцией Вигнера ее преимуществом является меньшая степень детализации и большая четкость визуализации лучевых многообразий. Это позволяет заключить, что сглаженная функция Вигнера является перспективным методом частотно-временного анализа радиозатменных данных.

### Литература

1. Горбунов М.Е. Физические и математические принципы спутникового радиозатменного зондирования атмосферы Земли. М.: ГЕОС, 2019, 300 с. ISBN 978-5-89118-780-1.

2. M. E. Gorbunov, Ionospheric correction and statistical optimization of radio occultation data, *Radio Science*, 2002, 37(5), 17-1–17-9, doi: 10.1029/2000RS002370.
3. Павельев А. Г. О возможности радиологического исследования радиополей вблизи зоны радиотени на трассах спутник-спутник. *Радиотехника и Электроника*, 1998, Т. 43, № 8, с. 875—879.
4. Hocke, K., Pavelyev, A. G., Yakovlev, O. I., Barthes, L. and Jakowski, N. (1999), 'Radio occultation data analysis by the radioholographic method', *J. Atmos. Sol. Terr. Phys.* **61**(15), 1169–1177, doi: 10.1016/S1364-6826(99)00080-2.
5. Igarashi, K., Pavelyev, A., Hocke, K., Pavelyev, D., Kucherjavenkov, I. A., Matyugov, S., Zakharov, A. and Yakovlev, O. (2000), 'Radio holographic principle for observing natural processes in the atmosphere and retrieving meteorological parameters from radio occultation data', *Earth Planets Space* **52**(11), 893–899, doi: 10.1186/BF03352302.
6. Beyerle, G., Hocke, K., Wickert, J., Schmidt, T., Marquardt, C. and Reigber, C. (2002), 'GPS radio occultations with CHAMP: A radio holographic analysis of GPS signal propagation in the troposphere and surface reflections', *J. Geophys. Res.* **107**(D24), 4802, doi: 10.1029/2001JD001402.
7. Pavelyev, A., Igarashi, K., Reigber, C., Hocke, K., Wickert, J., Beyerle, G., Matyugov, S., Kucherjavenkov, A., Pavelyev, D. and Yakovlev, O. (2002), 'First application of the radioholographic method to wave observations in the upper atmosphere', *Radio Sci.* **37**(3), 1043, doi: 10.1029/2000RS002501.
8. Gorbunov, M. E., Gurvich, A. S. and Kornblueh, L. (2000), 'Comparative analysis of radioholographic methods of processing radio occultation data', *Radio Sci.* **35**(4), 1025-1034, doi: 10.1029/1999RS002247.
9. C. Marquardt, A. von Engeln, R. Notarpietro, Y. Andres, S. Paoella, A. Nardo, L. Butenko, Empirical RO Uncertainty Estimates Based on Signal Spectra, Poster presentation at Joint 6th ROM SAF User Workshop and 7th IROWG Workshop, EUMETSAT ROM SAF, Konventum, Helsingør (Elsinore), Denmark, 19–25 September 2019.
10. M. E. Gorbunov, K. B. Lauritsen, S. S. Leroy, Application of Wigner distribution function for analysis of radio occultations, *Radio Science*, 2010, V. 45, RS6011, doi:10.1029/2010RS004388.
11. M. E. Gorbunov, K. B. Lauritsen, S. S. Leroy, Analysis of RO data retrieved from the Wigner distribution function, International Radio Occultation Working Group, 2nd Workshop, 28th March – 3rd April 2012, Stanley Hotel in Estes Park, CO, USA, 2012.
12. M.E. Gorbunov, O.A. Koval, G. Kirchengast, Kirkwood Distribution Function and its Application for the Analysis of Radio Occultation Observations, Poster presentation at Joint 6th ROM SAF User Workshop and 7th IROWG Workshop, EUMETSAT ROM SAF, Konventum, Helsingør (Elsinore), Denmark, 19–25 September 2019.
13. M. Gorbunov, O. Koval. A new algorithm of evaluation of Wigner Distribution Function with application to radio occultation analysis. Poster at 8th International Radio Occultation Working Group Meeting - IROWG-8 Hosted by NOAA / UCAR, April 7-9, 12 and 13, 2021, Virtual Meeting.
14. Горбунов М.Е., Коваль О.А. Квантовые плотности Кирквуда и Вигнера, их свойства и приложения в радиофизике. *Изв. вузов. Радиофизика*. 2021. Т. 64, № 2. С. 153–162. DOI: 10.52452/00213462\_2021\_64\_02\_153.
15. M. Gorbunov and O. Dolovova, Fractional Fourier Transform and distributions in the ray space: application for the analysis of radio occultation data, *Remote Sensing*, 2022, 14(22), 5802, doi: 10.3390/rs14225802.