

Математическое моделирование трансформаций особых каустических структур радиоволн в неоднородных средах

А.С. Крюковский¹, Д.В. Растягаев¹

¹ АНО ВО «Российский новый университет»

105005, г. Москва, ул. Радио, 22.

E-mail: kryukovsky56@yandex.ru

Изучено образование каустических особенностей (катастроф) каспидного типа при зондировании электромагнитными волнами плазменного слоя (ионосферы). Описан метод вычисления положения центров особенностей в расширенном пространстве параметров задачи и на примере плоскостростого плазменного слоя с плавной границей выполнено математическое моделирование. Для катастрофы типа A_5 («бабочка») построены графики зависимостей расстояния от источника излучения до плазменного слоя, координат особенности, высоты отражения траектории от плазменного слоя, угла выхода луча и отношения плазменной частоты к рабочей частоте от параметра, характеризующего форму слоя.

Ключевые слова: катастрофы, лучи, плазменный слой, каустики, распространение электромагнитных волн.

Mathematical modeling of transformations of singular caustic structures of radio waves in inhomogeneous media

A.S. Krukovsky¹, D.V. Rastygaev¹

¹ Russian New University.

The formation of caustic singularities (catastrophes) of the cuspid type during electromagnetic wave probing of the plasma layer (ionosphere) is studied. A method for calculating the position of singularity centers in the extended space of problem parameters is described, and mathematical modeling is performed using the example of a flat-layered plasma layer with a smooth boundary. For a catastrophe of the A_5 type ("butterfly"), graphs of the dependences of the distance from the radiation source to the plasma layer, the coordinates of the singularity, the height of the trajectory reflection from the plasma layer, the ray exit angle, and the ratio of the plasma frequency to the operating frequency on the parameter characterizing the shape of the layer are constructed.

Keywords: catastrophes, rays, plasma layer, caustics, propagation of electromagnetic waves.

Введение

Исследование особенностей фокусировки электромагнитного излучения в плазме является актуальной задачей радиофизики. В частности, при исследовании распространения радиоволн в ионосфере Земли возникают каустики и их особенности, приводящие к возникновению различных проблем в радиосвязи и радиолокации. Для описания распространения радиоволн, когда длина волны много меньше характерных размеров среды распространения (например, полутолщины слоя) обычно применяются различные асимптотические подходы. Среди них наиболее популярными являются лучевые методы [1,2]. Однако на каустиках (оггибающих лучевых семейств) такие методы неприменимы, поскольку каустические поверхности являются областями фокусировки и разделяют пространство на зоны с разным числом лучей.

Согласно теории катастроф [3, 4], в случае, когда задача сводится к двумерной, только две каустические особенности являются устойчивыми. Это гладкая каустика (**A**₂) и каустическое остриё (**A**₃). Если пространство трёхмерное, то помимо каустики и каустического острия устойчивыми являются две омбилики: эллиптическая (D_4^-) и гиперболическая (D_4^+), а также каспоидная катастрофа **A**₄ («ласточкин хвост»). В четырёхмерном пространстве добавляются ещё две катастрофы: параболическая омблика (D_5) и **A**₅ – «бабочка». Однако даже в двумерной задаче возникают сечения каустических особенностей более высоких порядков [6-9]. Как было показано ранее, при наличии дополнительных параметров, возникают не только характерные каустические сечения катастроф более высоких порядков, но и центры фокусировок [10].

В настоящей работе исследовано образование центров каустических каспоидных особенностей типа **A**₅ в двумерной задаче и выполнено численное моделирование.

Определение положений центров каспоидных катастроф

Пусть среда распространения радиоволн плоскостойкая, то есть эффективная диэлектрическая проницаемость среды $\varepsilon(z, \vec{b})$ является функцией только одной координаты z , а вектор \vec{b} – это набор дополнительных параметров, который расширяет координатное пространство. Рассмотрим лучевое распространение волн на основе бихарактеристической системы Гамильтона–Лукина [11,12]. В данном случае её можно представить в виде:

$$\frac{dk_z}{dx} = \frac{k_0}{2} \frac{\varepsilon'_z}{S}, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{\pm q}{S}, \quad q = \sqrt{\varepsilon - S^2}. \quad (1)$$

В формулах (1) $\vec{k} = (k_x, k_z)$ – это волновой вектор,

$$S = \cos \theta = \frac{k_x}{k_0}, \quad (2)$$

θ – угол выхода луча, отсчитанный от направления горизонтальной оси x , $k_0 = \omega / c$ – волновое число вне плазменного слоя, c – скорость света в вакууме, ω – круговая частота. Знак «–» соответствует нисходящей части лучевой траектории, а знак «+» – восходящей (рис. 1).

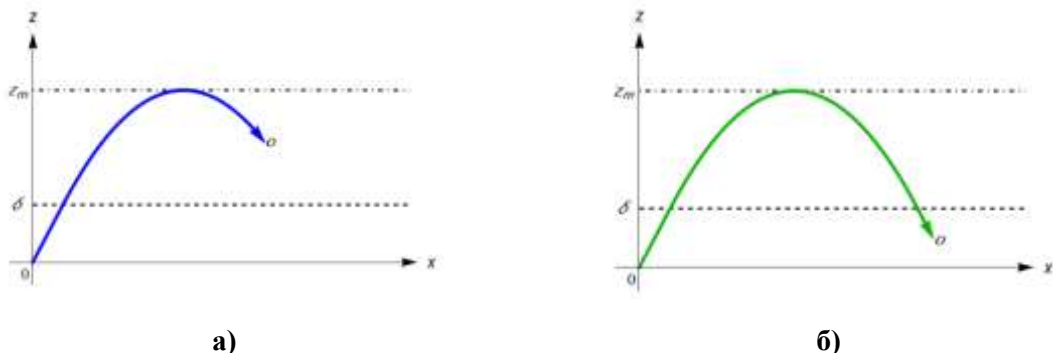


Рис. 1. Траектория луча в плазменном слое, центр особенности: внутри слоя – (а), под слоем – (б).

Бихарактеристическая система, дополненная начальными условиями

$$z(0) = 0, \quad k_z(0) = k_0 C, \quad C = \sqrt{\varepsilon(0, \vec{b}) - S^2}, \quad (3)$$

согласно теореме Коши имеет в фазовом пространстве (\vec{r}, \vec{k}) единственное решение, но в пространстве координат лучи пересекаются, имеют огибающие (каустики), а их особенности образуют области фокусировок различных порядков. Для определения положений каустик и их особенностей целесообразно ввести $\mu(S, x, z, \vec{b})$ обобщенный эйконал. Для того чтобы найти центр каустической особенности в двумерной задаче необходимо решить систему уравнений [10, 13-15]:

$$\mu_1 = 0, \quad \mu_2 = 0, \quad \mu_3 = 0, \quad \dots, \quad \mu_n = 0, \quad \mu_{n+1} \neq 0 \quad (4)$$

где $\mu_n = \partial^n \mu / \partial S^n$. Траекторию луча определяет первое уравнение. Первое и второе уравнения совместно определяют положение каустики (особенность A_2). Добавляя последовательно другие уравнения можно найти центры особенностей «ласточкиного хвоста» (A_4), «бабочки» (A_5), «вигвама» (A_6), «звезды» (A_7) и т.д. [10, 16-18]. При этом, разумеется, необходимо, чтобы следующая производная не равнялась нулю.

Система уравнений (4) может иметь решение при $n > 3$, если кроме координат x , y и угла θ существуют дополнительные параметры, обозначенные как \vec{b} . В данной работе это δ – высота, с которой начинается плазменный слой, и $a = \omega_p / \omega$ – отношение плазменной круговой частоты к рабочей. Тогда эффективную диэлектрическую проницаемость холодной изотропной плазмы можно представить в виде:

$$\varepsilon = 1 - a^2 N(z). \quad (5)$$

Функция $N(z)$ в (5) описывает нормированное распределение электронной концентрации. В отличие от предыдущих исследований (см., например, [10]) в данной работе функция $N(z)$ имеет вид:

$$N(z) = \begin{cases} Q^2 \left(3 - 2pQ - \frac{3}{2}(1-p)Q^2 \right), & Q = z - \delta, \quad z \geq \delta \\ 0, & z \leq \delta \end{cases}. \quad (6)$$

На рис. 2 приведены графики электронной концентрации N в зависимости от приведенной высоты Q (рис. 2 а) и от нормированной высоты z (рис. 2 б). Как функция приведенной высоты электронная концентрация обращается в нуль при $Q=0$ и имеет максимум при $Q=1$. Как функция нормированной высоты электронная концентрация оказывается не равной нулю при $z > \delta$, причём при $z=\delta$, непрерывной является не только функция, но её производная. Видно, что с ростом параметра p величина максимума возрастает. При $p \neq 1$ функция N зависит является полиномом четвёртой степени z (Q), а при $p=1$ только третьей. Источник излучения расположен в начале координат.

Обозначим максимум плазменного слоя как z_M . Тогда $z_M = 1 + \delta$. Тогда полутолщина слоя $z_A = 1$. Луч отражается от плазменного слоя на высоте $z = z_m$ ($z_m < z_M$). В точке «о» луч касается каустики или её особенности. Точка o может находиться внутри слоя или вне слоя как показано на рис. 1.

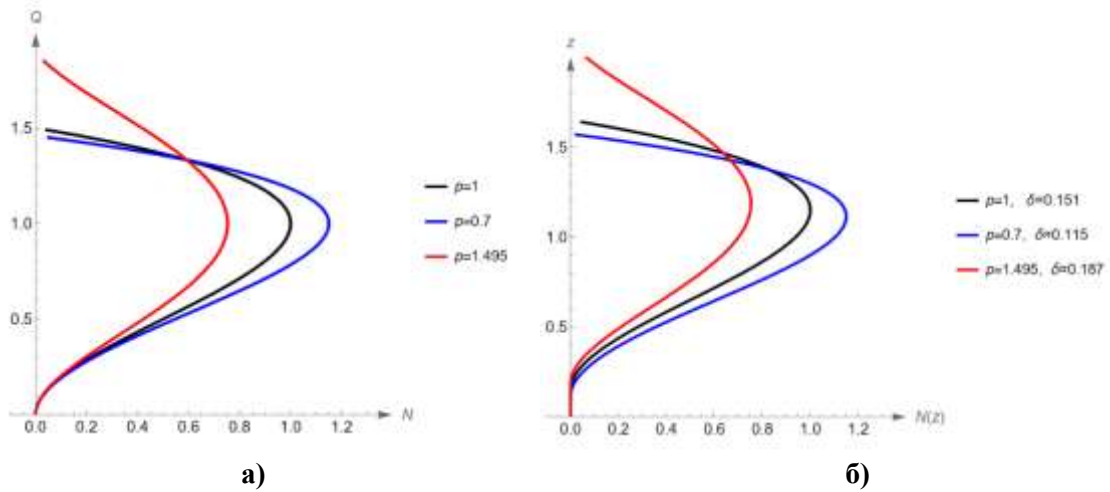


Рис. 2. Зависимости электронной концентрации N от приведенной высоты Q (а) и от нормированной высоты z (б).

В плоскостой среде нормированный эйконал в особой точке с координатами (x_o, z_o) можно представить как [10,19]:

$$\mu = Sx_o + C\delta + \int_{\delta}^{z_o} qdz + 2 \int_{z_o}^{z_m} qdz. \quad (7)$$

Когда особая точка находится под слоем, то

$$\mu = Sx_o + C(\delta - z_o) + 2 \int_{\delta}^{z_m} qdz. \quad (8)$$

Методика расчета производных эйконала и решения системы (4) рассмотрена в [10]. Перейдём теперь к результатам математического моделирования.

Результаты математического моделирования

Необходимым и достаточным условием образования центра катастрофы A_5 («бабочка»), которая устойчива в четырёхмерном пространстве [19,20], является равенство нулю пяти первых производных эйконала (4), а причём шестая производная должна быть неравной нулю. В данном случае у нас пять параметров: x_o, z_o, δ, S, a (S – параметр фокусировки). Горизонтальная координата особенности x_o однозначно определяется из уравнения $\mu_1 = 0$, после того как определены остальные параметры z_o, δ, S, a из решения четырёх уравнений:

$$\mu_2 = 0, \mu_3 = 0, \mu_4 = 0, \mu_5 = 0. \quad (9)$$

При этом считается, что параметр p задан.

На рис. 3–6 показаны зависимости исследуемых параметров, вычисленные как решения системы (4), то есть в центральной точке катастрофы A_5 «бабочка» с координатами (x_o, z_o) , от параметра слоя p . На рис. 3 а приведена зависимость угла выхода луча θ из источника излучения от параметра слоя p , а на рис. 3 б функция $S(p)$.

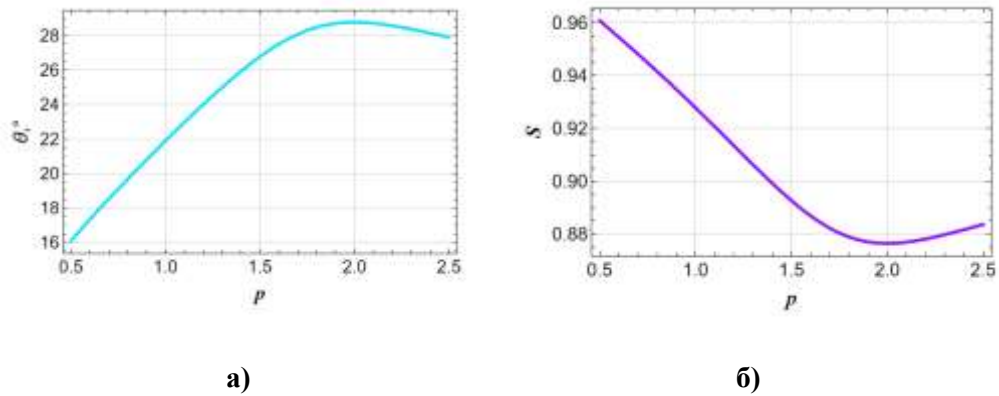


Рис. 3. Зависимость угла θ (а) и отношения плазменной и параметра фокусировки S (б) от параметра слоя p .

Функция $\theta(p)$ почти линейно нарастает при $p < 1.5$, при $p \approx 2.0$ имеет максимум, а при $p > 2$ плавно убывает. Функция $S(p)$, наоборот, сначала линейно убывает, проходит минимум и начинает плавно нарастать.

На рис. 4 показаны функции $a(p)$ и $x_o(p)$.

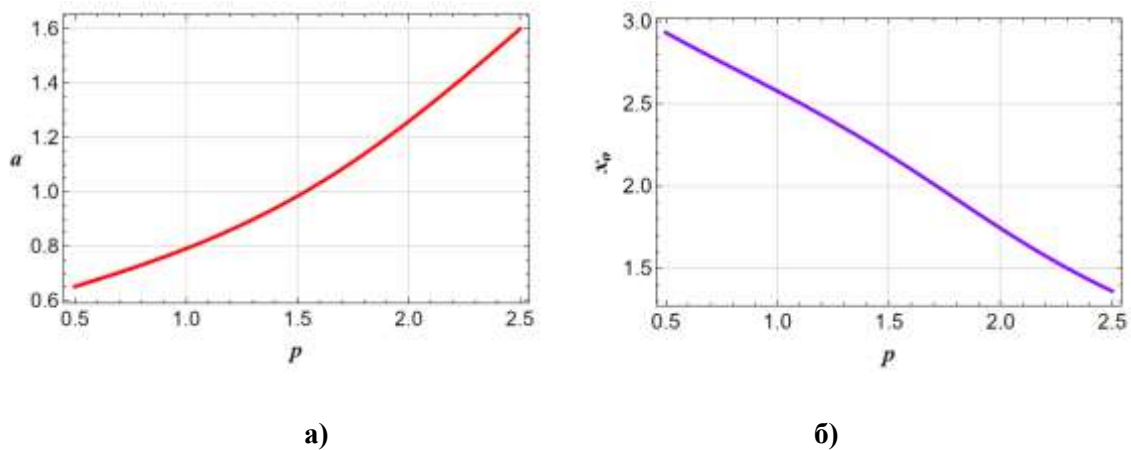


Рис. 4. Зависимость отношения плазменной и рабочей частоты a (а) и координаты особенности x_o (б) от параметра слоя p .

Эти функции при данных значениях параметра p не имеют экстремумов. С ростом p функция $a(p)$ достаточно быстро нарастает, а функция $x_o(p)$ почти линейно убывает, то есть особенность приближается к источнику излучения.

На рис. 5 показаны зависимости границы слоя $\delta(p)$ (чёрная линия), высоты особой точки $z_o(p)$ (синяя линия) и высоты отражения луча от плазменного слоя $z_m(p)$ (зелёная линия). В окрестности значения $p=1.5$ (когда вклад четвертой степени высоты в формулу профиля электронной концентрации уже существенен) все три линии имеют максимум, причём высоты особой точки всегда располагается между границей слоя и высотой отражения луча.

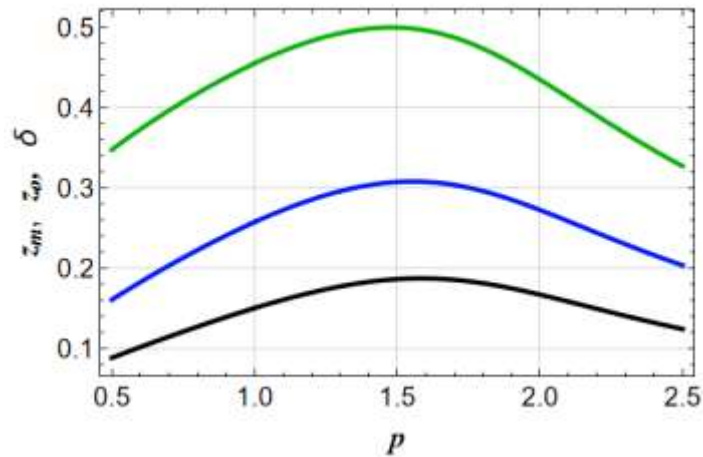


Рис. 5. Зависимость нижней границы слоя δ , положения центра особенности z_o и высоты отражения луча z_m от параметра p .

На рис. 6 показаны зависимости тех же величин: $\delta(x_o)$, $z_o(x_o)$ и $z_m(x_o)$, но уже от горизонтальной координаты.

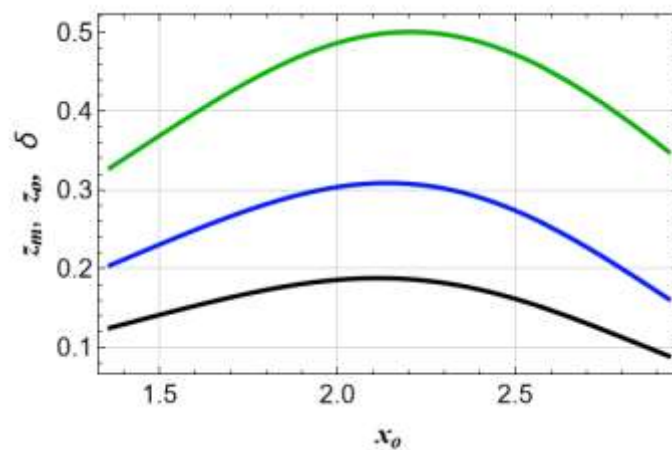


Рис. 6. Зависимость нижней границы слоя δ , положения центра особенности z_o и высоты отражения луча z_m от координаты x_o .

Все три кривые имеют максимум, хотя и при разных значениях x_o .

Выводы

Таким образом, в работе исследована возможность образования каустических особенностей (катастроф) каспоидного типа высоких порядков при зондировании электромагнитными волнами плазменного слоя, например ионосферы Земли. Описан метод вычисления положения центров особенностей в расширенном пространстве параметров задачи. Выполнено численное моделирование для плоскостойкого плазменного слоя с плавной границей. Для катастрофы типа A_5 («бабочка») построены графики зависимостей расстояния от источника излучения до плазменного слоя δ , координат особенности x_o и z_o , высоты отражения траектории от плазменного слоя z_m , угла выхода луча θ и отношения плазменной частоты к рабочей частоте a от параметра

p , характеризующего форму слоя. На рис. 7 показана лучевая структура в окрестности центра особенности «бабочка».

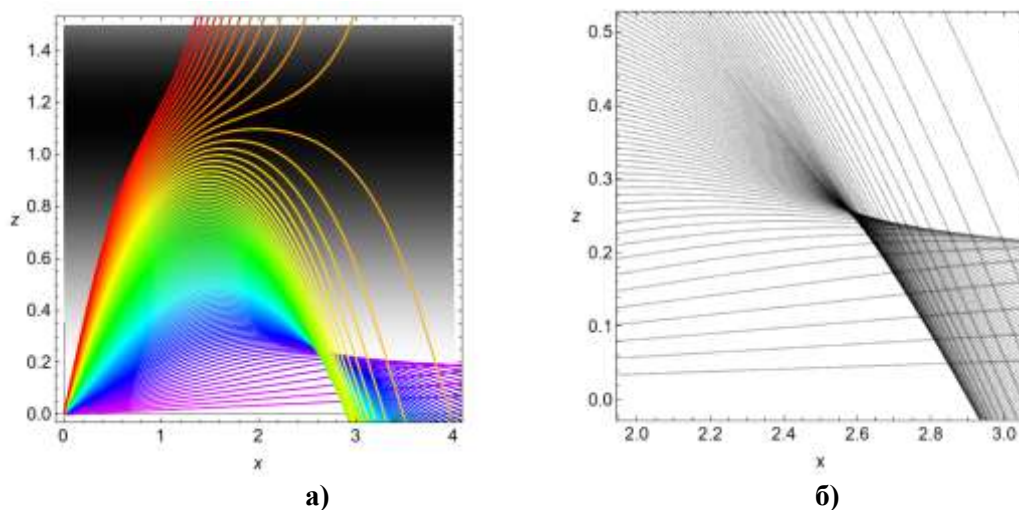


Рис. 7. Лучевая структура в окрестности центра особенности «бабочка»; полная картина – (а), фрагмент – (б).

Видно, что она напоминает геометрию лучей в окрестности каустического острия особенность **A3**). Однако если в окрестности каустического острия поле описывается функцией Пирси [20]:

$$l_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left[i \left(\xi^4 + \lambda_2 \xi^2 + \lambda_1 \xi \right) \right]. \quad (10)$$

и её производными, а коэффициент l_0 зависит от большого параметра задачи Λ (например, частоты ω) как $\Lambda^{1/4}$, то в случае особенности **A5** это другая функция [21, 22]

$$l_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left[i \left(\xi^6 + \lambda_4 \xi^4 + \lambda_3 \xi^3 + \lambda_2 \xi^2 + \lambda_1 \xi \right) \right], \quad (11)$$

а коэффициент l_0 зависит от Λ как $\Lambda^{1/3}$. Таким образом порядок фокусировки поля существенно возрастает.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 25-22-00096.

Литература

1. Казанцев А.Н., Лукин Д.С., Спиридонов Ю.Г. Метод исследования распространения радиоволн в неоднородной магнитоактивной ионосфере // Космические исследования. – 1967. – Т. 5. Вып. 4. – С. 593–600.
2. Крюковский А.С., Лукин Д.С., Кирьянова К.С. Метод расширенной бихарактеристической системы при моделировании распространения радиоволн в ионосферной плазме. // Радиотехника и электроника, М.: Наука. 2012. Т.57. №9. С. 1028–1034.
3. Whitney H. On singularities of mappings of Euclidean space 1. Mappings of the plane into the plane // Ann. of Math., 1955. V. 62. P.374–410.
4. Thom R. Structural Stability and Morphogenesis / Tr. from French by D. H. Fowler. Benjamin-Addison-Welsey: New York. 1975. 345 p.
5. Poston T., Ian Stewart I. Catastrophe Theory and Its Applications Dover Publications, Incorporated, 2013. 512 p.

6. Орлов Ю.И. Особенности лучевых и каустических картин в неоднородном параболическом слое // Изв. ВУЗов (Радиофизика). 1976. Т. 20. № 11. С. 1669–1675.
7. Крюковский А.С. Топология каустик и волновое поле в плазменном слое с параболическим распределением электронной концентрации // Труды МФТИ серия «Общая и молекулярная физика» / МФТИ, М., 1979. Вып. 11. С. 74–78.
8. Крюковский А.С., Лукин Д.С., Палкин Е.А. К вопросу о построении асимптотических решений в областях перекрытия прикаустических зон // Изв. ВУЗов МВ и ССО СССР (Радиофизика), 1982, Т. 25, № 11. С. 1375–1376.
9. Крюковский А.С., Растягаев Д.В. Исследование устойчивых фокусировок, возникающих при нарушении симметрии волнового фронта. // Распространение и дифракция электромагнитных волн. М. МФТИ, 1993. С. 20–37.
10. Крюковский А.С., Лукин Д.С. Определение центров топологических особенностей при фокусировке поля в плоскостой среде. // Труды 7-й конференции молодых ученых Московского физико-технического института. 1982. С. 138–148.
11. Казанцев А.Н., Лукин Д.С., Спиридонов Ю.Г. Метод исследования распространения радиоволн в неоднородной магнитоактивной ионосфере // Космические исследования. – 1967. – Т. 5. Вып. 4. – С. 593–600.
12. Hamilton, William Rowan, Sir. On a general method of expressing the paths of light, & of the planets, by the coefficients of a characteristic function. Printed by P.D. Hardy. 1833. 34 p.
13. Budden K.G. Radio caustics and cusps in the ionosphere // Proc. Roy. Soc., London. 1976. V. A350. No 1661. P. 143-164.
14. Крюковский А.С., Лукин Д.С. Определение структуры коротковолнового поля в областях одномерной фокусировки в плоскостой среде // Труды VI конференции молодых ученых МФТИ. 1981. С. 218–227.
15. Крюковский А.С., Растягаев Д.В. О необходимых и достаточных условиях образования каспидных катастроф // Распространение и дифракция волн в неоднородных средах. Москва, МФТИ, 1989. С. 56–60.
16. Дорохина Т.В., Крюковский А.С., Лукин Д.С. Информационная система "Волновые катастрофы в радиофизике, акустике и квантовой механике" // Электромагнитные волны и электронные системы. 2007. Т. 12. № 8. С. 71–74.
17. Kryukovskii A.S., Rastyagaev D.V., Lukin D.S. Construction of uniform asymptotic solutions of wave-type differential equations by methods of catastrophe theory // Russian Journal of Mathematical Physics. 2009. Т. 16. № 2. С. 251–264.
18. Крюковский А.С., Лукин Д.С., Палкин Е.А., Растягаев Д.В. Теория катастроф и её приложения к описанию фокусировки, дифракции и распространения волновых полей // ТРУДЫ МФТИ. Труды Московского физико-технического института (национального исследовательского университета). 2009. Т. 1. № 2. С. 54–71.
19. Крюковский А.С., Лукин Д.С. Локальное асимптотическое описание электромагнитного поля в окрестности каустического острия в плоско-слоистой среде // Вопросы дифракции электромагнитных волн. М.: МФТИ, 1982. С. 40–45.
20. Pearcey T. The structure of an electromagnetic field in the neighborhood of a cusp of a caustic // Philos. Mag., 1946. V. 37. P. 311 – 317.
21. Лукин Д.С., Палкин Е.А. Численный канонический метод в задачах дифракции и распространения электромагнитных волн в неоднородных средах. М.: МФТИ, 1982. 159 с.
22. Крюковский А.С. Равномерная асимптотическая теория краевых и угловых волновых катастроф. Монография. М.: РосНОУ, 2013.–368 с.