

Применение пространственно-временной геометрической теории дифракции для описания распространения ЛЧМ радиоимпульсов в однородной и неоднородной ионосферной плазме на основе применения теории краевых катастроф

А.С. Крюковский, Е.В. Михалёва, Д.В. Растягаев

¹ АНО ВО «Российский новый университет»
105005, г. Москва, ул. Радио, 22.
E-mail: rdv@rosnou.ru

Представлены результаты применения пространственно-временной геометрической теории дифракции для описания распространения ЛЧМ радиоимпульсов в однородной и неоднородной ионосферной плазме на основе применения теории краевых катастроф. Выполнено численное моделирование амплитудной структуры радиосигналов неравномерными и равномерными асимптотическими методами.

Ключевые слова: радиоимпульс, плазма, геометрическая теория дифракции, лучи, ЛЧМ, каустики

Application of space-time geometric diffraction theory to describe the propagation of chirp radio pulses in inhomogeneous ionospheric plasma based on the application of the theory of edge catastrophes

A.S. Kryukovsky, E.V. Mikhaleva, D.V. Rastyagaev

¹ Russian New University.

The results of applying spatiotemporal geometric diffraction theory to describe the propagation of chirped radio pulses in homogeneous and inhomogeneous ionospheric plasma are presented, based on the theory of edge catastrophes. Numerical modeling of the amplitude structure of radio signals is performed using nonuniform and uniform asymptotic methods.

Keywords: radio pulse, plasma, geometric theory of diffraction, rays, chirp, caustics

Введение

Рассмотрено математическое моделирование распространения линейно частотно-модулированных (ЛЧМ) радиоимпульсов в плазме. Хорошо известно, что при распространении в диспергирующих средах первоначальная форма импульса искажается [1, 2]. Дисперсия в холодной плазме, например, в ионосфере Земли, является причиной расплывания радиоимпульсов, или наоборот, компрессии и инверсии радиосигнала [3, 4]. В работе развивается подход к описанию распространения радиоимпульсов, основанный на методе пространственно-временной геометрической теории дифракции (ПВ ГТД) [5-12]. В рамках ПВ ГТД предполагается, что начало и конец радиоимпульса являются источниками краевых лучевых семейств, которые интерферируют как между собой, так и с ПВ волной несущей частоты. Частотная модуляция может вызвать фокусировку радиосигнала с образованием волновых катастроф, причём ПВ краевые лучи также могут фокусироваться, образуя единую ПВ каустическую структуру – краевую катастрофу [12,13,14].

Постановка задачи

В скалярном изотропном случае в холодной плазме волновое поле $u(t, \vec{r})$ удовлетворяет уравнению Клейна – Гордона [4]:

$$\Delta u - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\omega_p^2}{c^2} u. \quad (1)$$

В уравнении (1) c – это скорость света, t – время, а $\omega_p = 2\pi f_p$ – плазменная частота. Вектор координат обозначим как $\vec{r} = (x, y, z)$. В работе [4, 15] показано, что решение уравнения (1) может быть получено в виде двукратного быстро осциллирующего интеграла:

$$u(t, \vec{r}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{\frac{|J_0|}{|J|}} B(\eta) \exp[i(\omega_0 \eta + \omega_0 f(\eta) - \omega \eta + \omega t - \tilde{\Phi})] d\eta, \quad (2)$$

в котором ω_0 – круговая несущая частота радиоимпульса, $B(\eta)$ – амплитудная функция, зависящая от начального времени η , ω – круговая частота парциальной волны, J – якобиан расходимости [16], J_0 – начальный якобиан расходимости, а через $\tilde{\Phi}$ обозначена фаза вдоль монохроматического луча с частотой ω :

$$\tilde{\Phi} = \int \tilde{k}_x dx + \tilde{k}_y dy + \tilde{k}_z dz, \quad (3)$$

$(\tilde{k}_x, \tilde{k}_y, \tilde{k}_z)$ – компоненты волнового вектора.

Решение (2) справедливо тогда, когда ПВ геометрооптические (ГО) лучи не образуют каустику. В противном случае кратность интеграла повышается до трёх или даже до четырёх [14].

Если среда распространения – изотропная однородная плазма, то эффективную диэлектрическую проницаемость среды распространения можно представить в виде:

$$\varepsilon = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}, \quad (4)$$

а формула (2) принимает вид:

$$u(t, \vec{r}) = \frac{1}{2\pi r} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} B(\eta) \exp[i(\omega_0 \eta + \omega_0 f(\eta) - \omega \eta + \omega t - kr\sqrt{\varepsilon})] d\eta. \quad (5)$$

Частотная модуляция радиосигнала определяется функцией $f(\eta)$. В случае ЛЧМ сигнала она имеет вид:

$$f(\eta) = \alpha \frac{\eta^2}{2}. \quad (6)$$

Каустики ПВ ГО лучей

Рассмотрим случай однородной холодной плазмы. Для этого проанализируем критические точки двукратного интеграла (5). К ним относятся стационарные точки и краевые точки, обусловленные началом и концом радиоимпульса. Сначала найдём стационарные точки интеграла (5), фаза интегранты которого равна:

$$\Phi = \omega_0 \eta + \omega_0 f(\eta) - \omega \eta + \omega t - kr\sqrt{\varepsilon}. \quad (7)$$

В стационарной точке первые производные фазы интегранты по внутренним переменным обращаются в нуль:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \omega} = t - \eta - \frac{r}{c\sqrt{\varepsilon}} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} = \omega_0 + \omega_0 f'_\eta - \omega = 0. \quad (8)$$

Из системы (8) можно найти внутренние переменные $\omega=\omega_s$ и $\eta=\eta_s$. Если частотная модуляция отсутствует, то:

$$\omega_s = \omega_0, \quad \eta_s = t - \frac{r}{c\sqrt{\varepsilon_0}}, \quad \varepsilon_0 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2}. \quad (9)$$

Если же имеет место ЛЧМ, то необходимо численно решить уравнение третьего порядка относительно η :

$$(t - \eta) \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2(1 + \alpha\eta)^2}} = \frac{r}{c}, \quad (10)$$

например, с помощью формулы Кардано. Чтобы применить к интегралу (5) метод стационарной фазы необходимо вычислить вторые производных фазы по внутренним переменным. Они равны:

$$\Phi''_{\eta\eta} = \omega_0 f''_{\eta\eta}(\eta_s), \quad \Phi''_{\omega\omega} = \frac{r\omega_p^2}{c\omega_s^3 \varepsilon_s^{3/2}}, \quad \Phi''_{\omega\eta} = -1, \quad (11)$$

$$\text{причём } \varepsilon_s = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega_s^2}.$$

Когда частотная модуляция отсутствует:

$$\det H = \Phi''_{\omega\omega} \Phi''_{\eta\eta} - (\Phi''_{\omega\eta})^2 = -1 \neq 0. \quad (12)$$

поскольку $\Phi''_{\eta\eta} = 0$. Поэтому каустика ПВ ГО лучей отсутствует. Однако, если

$$\Phi''_{\omega\omega} \Phi''_{\eta\eta} - (\Phi''_{\omega\eta})^2 = 0, \quad (13)$$

система (8) может иметь несколько действительных решений. С нарастанием частоты со временем возможно возникновение каустик, соответствующих областям ПВ фокусировок. Подставив значения вторых производных (11) в (13), получаем условие образования каустики:

$$\omega_0 f''_{\eta\eta}(\eta_s) \frac{r\omega_p^2}{c\omega_s^3 \varepsilon_s^{3/2}} = 1. \quad (14)$$

Равенство (14) является необходимым условием образования ПВ каустики. Для того, чтобы убедиться, что это именно гладкая каустика (**A**₂), а не каспоидная катастрофа более высокого порядка, необходимо вычислить третьи производные:

$$\Phi'''_{\eta\eta\eta} = \omega_0 f'''_{\eta\eta\eta}(\eta_s), \quad \Phi'''_{\eta\eta\omega} = \Phi'''_{\eta\omega\omega} = 0, \quad \Phi'''_{\omega\omega\omega} = -\frac{3r\omega_p^2}{c(\omega_s^2 - \omega_p^2)^2 \varepsilon_s^{1/2}} \quad (15)$$

Согласно работе [17], каустическое остриё образуется при условии, что выражение

$$L_3(\Phi, 1, -\varphi) = 0, \quad (16)$$

где

$$L_n(\Phi, 1, -\varphi) = \sum_{j=0}^n \frac{\partial^n \Phi}{\partial \eta^{n-j} \partial \omega^j} (-\varphi)^j, \quad \varphi = \frac{\Phi''_{\eta\omega}}{\Phi''_{\omega\omega}}. \quad (17)$$

Здесь учтено, что согласно (11) $\Phi''_{\omega\omega} \neq 0$. Подставляя (11) в (16), находим, что

$$L_3(\Phi, 1, -\varphi) = \Phi'''_{\eta\eta\eta} - \varphi^3 \Phi'''_{\omega\omega\omega} \quad (18)$$

или

$$L_3 = \frac{3c^2 \omega_s (\omega_s^2 - \omega_p^2)^2}{r^2 \omega_p^4} + \omega_0 f_{\eta\eta\eta}''' . \quad (19)$$

Очевидно, что, если частотная модуляция линейная (формула (6)), $L_3 \neq 0$, и каустическое острие (\mathbf{A}_3) не образуется.

Следующая каспоидная катастрофа («ласточкин хвост» – \mathbf{A}_4) возникает тогда, когда не только $L_3=0$, но и выполняется условие:

$$Tail = \Phi_{\omega\omega}'' L_4(\Phi, 1, -\varphi) - 3L_2^2(\Phi_{\omega}', 1, -\varphi) = 0 . \quad (20)$$

Для применения формулы (20) необходимо знание четвёртых производных. В нашем случае они равны:

$$\Phi_{\eta\eta\eta\eta}^{(4)} = \omega_0 f_{\eta\eta\eta\eta}^{(4)}(\eta_s), \quad \Phi_{\eta\omega\omega\omega}^{(4)} = \Phi_{\eta\eta\omega\omega}^{(4)} = \Phi_{\eta\eta\eta\omega}^{(4)} = 0, \quad \Phi_{\omega\omega\omega\omega}^{(4)} = \frac{3r \omega_s \omega_p^2 \varepsilon_s^{1/2} (4\omega_s^2 - \omega_p^2)}{c(\omega_s^2 - \omega_p^2)^4} \quad (21)$$

Подставляя найденные выражения в (20), получаем:

$$Tail = \frac{r \omega_s \omega_0 \omega_p^2 \varepsilon_s^{1/2} f_{\eta\eta\eta\eta}^{(4)}}{c(\omega_s^2 - \omega_p^2)^2} - \frac{3c^2 (5\omega_s^4 - 6\omega_s^2 \omega_p^2 + \omega_p^4)}{r^2 \omega_p^4} . \quad (22)$$

Полином, стоящий в числителе во втором члене формулы (22), имеет два корня: $\omega_{s1}^2 = \omega_p^2$ и $\omega_{s2}^2 = \frac{\omega_p^2}{5}$, но оба корня не больше ω_p^2 . Поэтому, если $f_{\eta\eta\eta\eta}^{(4)}(\eta_s)$ равно нулю, то катастрофа \mathbf{A}_4 не возникает.

Неравномерные асимптотики ПВ ГТД

Рассмотрим распространение прямоугольного импульса длительности T , который начинается в момент времени $t=0$ (см. рис.1). Тогда амплитудная функция может быть представлена в виде

$$B(\eta) = \chi(\eta) \chi(T - \eta) A(\eta), \quad \chi(\eta) = \begin{cases} 1, & \eta \geq 0 \\ 0, & \eta < 0 \end{cases} . \quad (23)$$

С учётом (23) интеграл (5) равен

$$u(t, \vec{r}) = \frac{1}{2\pi r} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int_0^T A(\eta) \exp[i(\omega_0 \eta + \omega_0 f(\eta) - \omega \eta + \omega t - kr\sqrt{\varepsilon})] d\eta . \quad (24)$$

Значение быстро-осциллирующего интеграла (24) определяется вкладами критических точек двух типов. Это седловые (стационарные) точки, определяемые из решения системы уравнений (8), и две краевые точки внутреннего интеграла: $\eta = 0$ и $\eta = T$. Случай, когда частотная модуляция отсутствует, рассмотрен в работах [4,15].

Седловые точки соответствуют ПВ ГО лучам. Каждая точка на оси времени на отрезке $[0, T]$ порождает один ПВ ГО луч. На рис. 1 они показаны зелёным цветом. Поскольку далее в работе предполагается, что частота нарастает ($\alpha > 0$), то угол наклона этих лучей к оси времени t увеличивается. В отсутствии плазмы радиосигнал распространялся бы в области, ограниченной линиями, принадлежащими световому конусу: $r = ct$ и $r = c(t-T)$, которые на рис. 1 показаны чёрными стрелками.

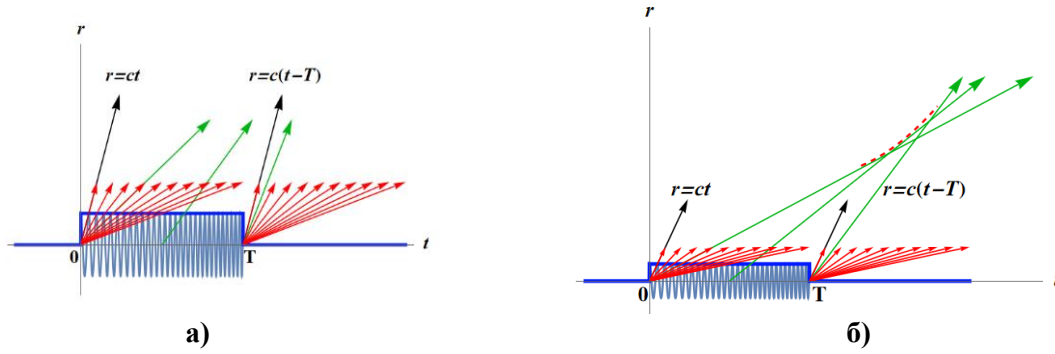


Рис. 1. Лучевая структура прямоугольного ЛЧМ радиоимпульса: а) – ближняя зона, б) – дальняя зона.

После применения метода стационарной фазы [4, 15], вклад седловой точки определяется выражением:

$$u_g^-(t, \vec{r}) \cong \frac{1}{r\sqrt{|\det H|}} \chi\left(t - \frac{r}{c\sqrt{\varepsilon_0}}\right) \cdot \chi\left(T - t + \frac{r}{c\sqrt{\varepsilon_T}}\right) \cdot A\left(t - \frac{r}{c\sqrt{\varepsilon_s}}\right) \cdot \exp[i\Phi_g^-], \quad (25)$$

в котором фаза Φ_g^- определяется формулой (7) с заменой η на η_s , а ω на $\omega_s = \omega_0(1 + \alpha \eta_s)$, а:

$$\varepsilon_T = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega_T^2}, \quad \omega_T = \omega_0(1 + \alpha T). \quad (26)$$

Формула (25) соответствует случаю, показанному на рис. 1 а, когда каустика ПВ ГО лучей ещё не образовалась, то есть когда $\det H < 0$. Если же возникла двухлучевая область (рис. 1 б), то в её окрестности пересекаются два луча: луч, не коснувшийся каустики (его вклад определяется формулой (25)) и луч, коснувшийся каустики. Его вклад имеет вид:

$$u_g^+(t, \vec{r}) \cong \frac{1}{r\sqrt{|\det H|}} \chi\left(t - \frac{r}{c\sqrt{\varepsilon_0}}\right) \cdot \chi\left(T - t + \frac{r}{c\sqrt{\varepsilon_T}}\right) \cdot A\left(t - \frac{r}{c\sqrt{\varepsilon_{sc}}}\right) \cdot \exp\left[i\left(\Phi_g^+ + \frac{\pi}{2}\right)\right], \quad (27)$$

где фаза Φ_g^+ определяется формулой (7) с заменой η на η_{sc} , а ω на $\omega_{sc} = \omega_0(1 + \alpha \eta_{sc})$. Формула (27) соответствует случаю, показанному на рис. 1 б, и ПВ лучу, для которого $\det H > 0$, а время выхода η_{sc} : $0 < \eta_{sc} < T$. Общий вклад в решение ПВ ГО в этой области определяется как

$$u_g(t, \vec{r}) = u_g^-(t, \vec{r}) + u_g^+(t, \vec{r}). \quad (28)$$

Начало и конец радиоимпульса являются источниками семейства ПВ краевых лучей, которые на рис.1 показаны красными стрелками. Угол наклона краевых лучей не превышает угла наклона линии светового конуса и соответствует определенной частоте, которая больше плазменной частоты ω_p (горизонтальная линия) и меньше бесконечности. Частота $\omega = \infty$ соответствует световому конусу.

Таким образом в лучевом приближении структура радиоимпульса определяется интерференцией ПВ ГО лучей и ПВ краевых лучей. Вне каустической зоны это:

$$u_n(t, \vec{r}) \cong u_g^-(t, \vec{r}) + u_{e1}(t, \vec{r}) + u_{e2}(t, \vec{r}), \quad (29)$$

а в области каустики:

$$u_n(t, \vec{r}) \cong u_g^-(t, \vec{r}) + u_g^+(t, \vec{r}) + u_{e1}(t, \vec{r}) + u_{e2}(t, \vec{r}). \quad (30)$$

Выражения для вкладов краевых лучей могут быть получены интегрированием по частям [4,15] и имеют вид:

$$u_{e1}(t, \vec{r}) \cong \frac{i \omega_p^{1/2} A(0)}{\sqrt{2\pi} c t^{3/2} \left(1 - \frac{r^2}{c^2 t^2}\right)^{3/4}} \chi\left(t - \frac{r}{c}\right) \times$$

$$\times \left[\frac{\exp\left[i\left(\omega_p t \sqrt{1 - \frac{r^2}{c^2 t^2}} + \frac{\pi}{4}\right)\right]}{\omega_0 - \omega_+^{e1}} + \frac{\exp\left[-i\left(\omega_p t \sqrt{1 - \frac{r^2}{c^2 t^2}} + \frac{\pi}{4}\right)\right]}{\omega_0 + \omega_+^{e1}} \right]. \quad (31)$$

$$u_{e2}(t, \vec{r}) \cong -\frac{i \omega_p^{1/2} A(T) \exp[i(\omega_0(T + f(T)))]}{\sqrt{2\pi} c (t-T)^{3/2} \left(1 - \frac{r^2}{c^2 (t-T)^2}\right)^{3/4}} \chi\left(t - T - \frac{r}{c}\right) \times$$

$$\times \left[\frac{\exp\left[i\left(\omega_p (t-T) \sqrt{1 - \frac{r^2}{c^2 (t-T)^2}} + \frac{\pi}{4}\right)\right]}{\omega_T - \omega_+^{e2}} + \frac{\exp\left[-i\left(\omega_p (t-T) \sqrt{1 - \frac{r^2}{c^2 (t-T)^2}} + \frac{\pi}{4}\right)\right]}{\omega_T + \omega_+^{e2}} \right]. \quad (32)$$

В формулах (31), (32)

$$\omega_{\pm}^{e1} = \pm \frac{\omega_p}{\sqrt{1 - \frac{r^2}{c^2 t^2}}}, \quad \omega_{\pm}^{e2} = \pm \frac{\omega_p}{\sqrt{1 - \frac{r^2}{c^2 (t-T)^2}}}, \quad (33)$$

причём $t > \frac{r}{c}$ или $t > T + \frac{r}{c}$.

На рис. 2 приведены амплитуды радиоимпульсов на расстоянии $r=500$ м от источника излучения, рассчитанные по формуле (29) (зелёная линия). Предполагается, что плазменная частота $f_p = 10$ МГц, рабочая частота равна $f_0 = \frac{71}{2\pi}$ МГц, $A(t) = 1$, частотная модуляция отсутствует, длительность импульса 10 мкс.

Чёрными точками отмечены границы световых конусов. Слева от первой чёрной точки, которая соответствует началу импульса, поле равно нулю, так как радиоизлучение не может распространяться быстрее скорости света. Вторая чёрная точка соответствует второму световому конусу на конце радиоимпульса. Красными стрелками отмечены две границы свет-тень, то есть предельные ПВ лучи. Промежуток от левой чёрной точки до красной стрелки – это «предвестник» радиосигнала. На рис. 2 а, где показана амплитуда ЛЧМ сигнала, расстояние от левой черной точки до красной стрелки вдоль оси времени больше, чем для правой точки, что объясняется ростом частоты сигнала. На рис. 2 б, где ЧМ отсутствует, эти расстояния равны. Осцилляции амплитуды поля связаны с интерференцией ПВ ГО и краевых лучей. Видно, что на рис. 2 а между левой красной

стрелкой и правой чёрной точкой осцилляций существенно больше, чем на рис. 2 б, что объясняется ЧМ радиосигнала.

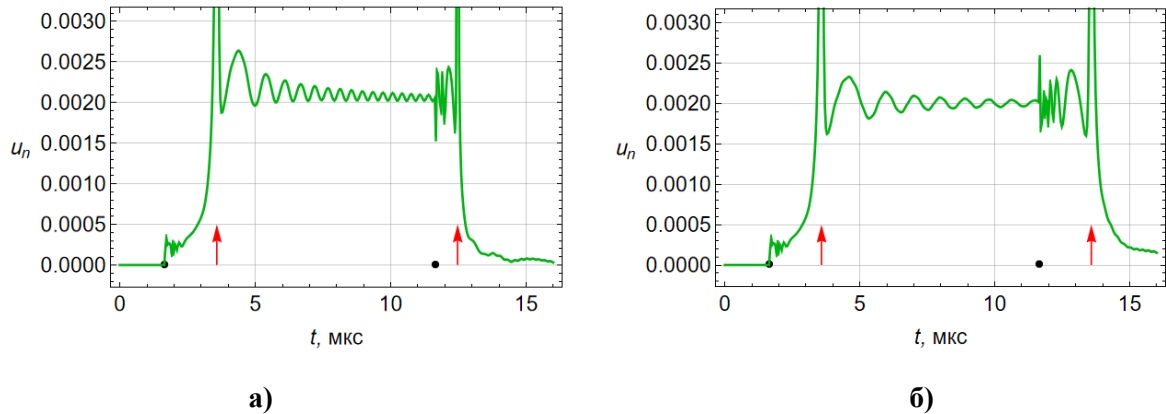


Рис. 2. Амплитуда радиоимпульса, неравномерная асимптотика: а) $\alpha=0.02$, б) $\alpha=0$.

Равномерные асимптотики ПВ ГТД

На границе свет-тень, когда частота ПВ краевого луча, совпадает частотой ПВ ГО луча, неравномерная асимптотика обращается в бесконечность. Поэтому необходима равномерная асимптотика, справедливая в окрестности границы свет-тень. В простейшем случае она выражается через интегралы Френеля.

Как показано в [4, 15] равномерная асимптотика имеет вид:

$$u_r(t, \vec{r}) = u_1(t, \vec{r}) - u_2(t, \vec{r}) + u_d(t, \vec{r}). \quad (34)$$

В формуле (34) u_1 и u_2 – это равномерные вклады левой и правой границы свет-тень:

$$u_1(t, \vec{r}) = \chi \left(t - \frac{r}{c} \right) e^{i\theta_1} (l_1^1 \text{Fr}(\lambda_1, k_1) + l_2^1),$$

$$u_2(t, \vec{r}) = \chi \left(t - T - \frac{r}{c} \right) e^{i(\theta_2 + \omega_0 T)} (l_1^2 \text{Fr}(\lambda_2, k_2) + l_2^2). \quad (35)$$

В (35)

$$\text{Fr}(\lambda, k) = \int_0^{+\infty} \exp[i(kx^2 + \lambda x)] dx \quad (36)$$

– интеграл Френеля,

$$\lambda_j = \sqrt{4k(\Phi_{ej} - \Phi_{gj})}, \quad k_j = \text{sign}(\Phi_{ej} - \Phi_{gj}), \quad \theta_j = \Phi_{ej}, \quad j=1,2 \quad (37)$$

$$l_1^j = \frac{A_g}{\sqrt{\pi}} e^{-i\pi k_j/4}, \quad l_2^j = A_{ej} + \frac{l_1^j}{i\lambda_j}, \quad j=1,2 \quad (38)$$

а фазы ПВ ГО и краевых волн имеют вид:

$$\Phi_{g1} = \omega_0 t - \frac{\omega_0 r}{c} \sqrt{\varepsilon_0}, \quad \Phi_{g2} = \omega_0 \left(t - T - \frac{r\sqrt{\varepsilon_0}}{c} \right), \quad (39)$$

$$\Phi_{e1} = \omega_p t \sqrt{1 - \frac{r^2}{c^2 t^2}}, \quad \Phi_{e2} = \omega_p (t - T) \sqrt{1 - \frac{r^2}{c^2 (t - T)^2}}. \quad (40)$$

Выражения для параметров равномерной асимптотики, приведённые выше, получены путём асимптотического сшивания неравномерного решения вида:

$$u_j(t, \vec{r}) \approx A_g e^{i\Phi_{gj}} + A_{ej} e^{i\Phi_{ej}}, \quad j=1,2 \quad (41)$$

и асимптотики равномерного решения. В формулах (38) и (41) амплитудные члены равны:

$$A_g = \frac{1}{r}, \quad A_{e1} = \frac{i\omega_p^{1/2} A(0)}{\sqrt{2\pi} c t^{3/2}} \left(1 - \frac{r^2}{c^2 t^2}\right)^{-3/4} \frac{e^{i\pi/4}}{\omega_0 - \omega_+^{e1}},$$

$$A_{e2} = \frac{i\omega_p^{1/2} A(0)}{\sqrt{2\pi} c (t-T)^{3/2}} \left(1 - \frac{r^2}{c^2 (t-T)^2}\right)^{-3/4} \frac{e^{i\pi/4}}{\omega_T - \omega_+^{e2}}. \quad (42)$$

Поправочный член u_d , входящий в формулу (34), компенсирует ошибку в краевом члене равномерной асимптотики интеграла Френеля [5] и имеет вид:

$$u_d(t, \vec{r}) \cong \frac{i\omega_p^{1/2} A(0)}{\sqrt{2\pi} c t^{3/2} \left(1 - \frac{r^2}{c^2 t^2}\right)^{3/4}} \chi\left(t - \frac{r}{c}\right) \frac{\exp\left[-i\left(\omega_p t \sqrt{1 - \frac{r^2}{c^2 t^2}} + \frac{\pi}{4}\right)\right]}{\omega_0 + \omega_+^{e1}} -$$

$$- \frac{i\omega_p^{1/2} A(T) \exp[i(\omega_0(T + f(T)))]}{\sqrt{2\pi} c (t-T)^{3/2} \left(1 - \frac{r^2}{c^2 (t-T)^2}\right)^{3/4}} \chi\left(t - T - \frac{r}{c}\right) \frac{\exp\left[-i\left(\omega_p (t-T) \sqrt{1 - \frac{r^2}{c^2 (t-T)^2}} + \frac{\pi}{4}\right)\right]}{\omega_T + \omega_+^{e2}}. \quad (43)$$

На рис. 3 приведены амплитуды радиоимпульсов, рассчитанные как с помощью формул равномерной асимптотики (синяя линия), так и по формулам неравномерной асимптотики (зелёная линия). Длительность импульса равна 12 мкс.

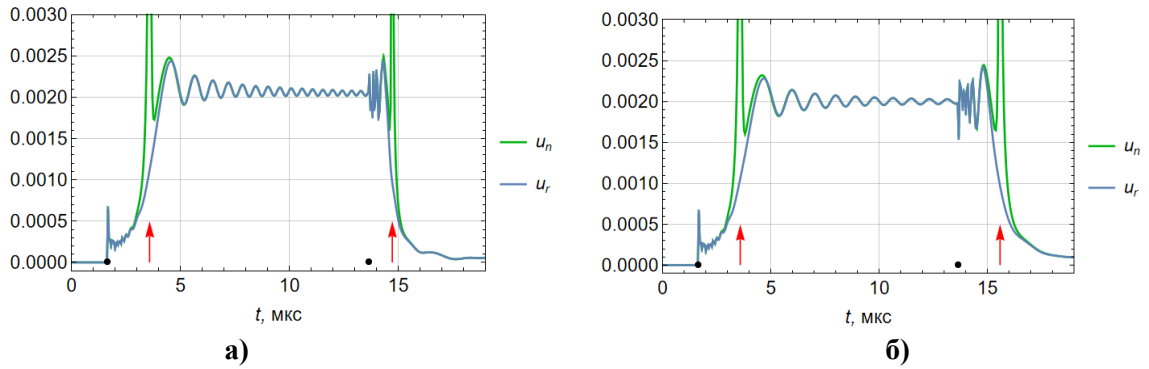


Рис. 3. Амплитуда радиоимпульса, неравномерная и равномерная асимптотики:
(а) $-\alpha = 0.01$, (б) $-\alpha = 0$.

Видно, что там, где неравномерная асимптотика обращается в бесконечность, равномерная асимптотика достигает примерно половины максимального значения. Неравномерная асимптотика хорошо совпадает с равномерной за исключением небольших окрестностей границ свет-тень. Что же касается осцилляций, возникающих вблизи световых конусов, то там равномерная асимптотика сигнала выражается через функцию Бесселя и её производную [4, 7, 11, 15, 18], и в данной работе не рассматривалась.

Равномерная асимптотика в случае ПВ краевой особенности

Если для левой границы свет-тень выполняется условие (14), то возникает краевая катастрофа **Вз** – краевой луч касается каустики, как это показано на рис. 1 б. При этом $\omega_s = \omega_0$ и формула упрощается:

$$\alpha = \frac{c}{r} \frac{\omega_0^2}{\omega_p^2} \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2} \right)^{3/2}. \quad (44)$$

Видно, что чем меньше параметр ЧМ α , тем дальше от источника излучения будет образовываться краевая катастрофа.

Формально вид равномерной асимптотики (34) не изменится, однако теперь член u_1 будет иметь вид:

$$u_1(t, \vec{r}) = \chi \left(t - \frac{r}{c} \right) e^{i\theta_1} \left(l_1^1 I^{B_3}(\lambda_1, \lambda_2) + l_2^1 \frac{\partial I^{B_3}(\lambda_1, \lambda_2)}{\partial \lambda_1} + l_3^1 \right), \quad (45)$$

где

$$I^{B_3}(\lambda_1, \lambda_2) = \int_0^{+\infty} \exp \left[i(x^3 + \lambda_2 x^2 + \lambda_4 x) \right] dx \quad (46)$$

неполная функция Эйри. Выражения для θ_1 , λ_1 , λ_2 , l_1^1 , l_2^1 , l_3^1 и поправку u_d можно найти методом асимптотического сшивания.

Выводы

Таким образом в работе рассмотрено применение ПВ ГТД для моделирования распространения прямоугольного ЛЧМ радиоимпульса в однородной и неоднородной плазме. Приведены формулы неравномерной ПВ ГО асимптотики и построены равномерные асимптотические разложения ПВ ГТД, использующие интегралы Френеля, а также неполную функцию Эйри и её производную. Получены необходимые и достаточные ПВ лучевой фокусировки радиосигнала, обусловленной линейной или нелинейной частотной модуляцией. Установлено, что линейная ЧМ приводит к образованию простой гладкой каустики – **А2**, в то время как нелинейная ЧМ может вызывать фокусировки типа **А3** – каустическое остриё, **А4** – ласточкин хвост и др. Расчёт амплитудной структуры радиоимпульсов с ЛЧМ и без модуляции показал увеличение числа осцилляций между границами свет-тень радиосигнала. Сопоставлены графики амплитуд, найденных по равномерным и неравномерным формулам и показано их совпадение всюду за исключение окрестностей границ свет-тень. Фокусировка радиосигнала в окрестности границы свет-тень приводит к образованию краевой катастрофы **Вз** (каустика с краем). Развитие методов ПВ ГТД связано с моделированием ПВ особых трёхмерных и краевых каустических структур [13, 14, 19].

Работа выполнена при поддержке гранта РНФ № 25-22-00096.

Литература

1. Гинзбург В.Л. Распространение электромагнитных волн в плазме. – М.: Наука, 1967. 685 с.
2. Иванов Д.В. Методы и математические модели исследования распространения в ионосфере сложных декаметровых сигналов и коррекции их дисперсионных искажений. Монография. – Йошкар-Ола: ПГТУ, 2006. 266 с.
3. Кравцов Ю.А., Орлов Ю.И. Геометрическая оптика неоднородных сред. – М.: Наука, 1980. 304 с.

4. Крюковский А.С., Лукин Д.С. Краевые и угловые катастрофы в равномерной геометрической теории дифракции. Учебное пособие. – М.: МФТИ, 1999. 134 с.
5. Боровиков В.А., Кинбер Б.Е. Геометрическая теория дифракции. – М.: Связь, 1978. 248 с.
6. Lewis R.M. Asymptotic theory of transients // In: Electromagnetic Wave Theory. Part 2. Ed. by J. Brown / N.Y.: Pergamon Press. 1967. P.845–869.
7. Felsen L.B. Solution near wavefront of transient field in inhomogeneous dispersive media // IEEE Trans. on Ant. and Prop. 1972. AP-20. No 2. P. 219–221.
8. Анютин А.П., Орлов Ю.И. Асимптотическая теория распространения модулированных радиосигналов в неоднородной диспергирующей среде. // Труды МЭИ, М.: МЭИ, 1974. Вып. 194. С. 99–102.
9. Анютин А.П. Асимптотическая теория распространения радиосигналов в неоднородной плазме. // Распространение радиоволн в ионосфере – М.: ИЗМИР АН СССР, 1978. С. 19–28.
10. Анютин А.П., Кинбер Б.Е. Некоторые обобщения и приложения ВГТД // Тез. докл. VIII Всесоюз. симпоз. по дифракции и распространению волн. 1981 г., Львов/ М.: ИРЭ АН СССР, 1981. Т.3. С.276–279.
11. Анютин А.П. ВГТД видеосигналов в однородной среде. // XIII Всесоюзная конференция по распространению радиоволн. Горький, 1981. – М.: Наука, 1981. – Ч. 2.– С. 251–254.
12. Анютин А.П. Равномерная модификация метода ВГТД в случае произвольной диспергирующей среды и каустик ВГО и ВГТД лучей. // Дифракция и распространение волн. Междув. сборник / М.: МФТИ, 1985. С. 32–36.
13. Крюковский А.С. Равномерная асимптотическая теория краевых и угловых волновых катастроф. Монография. – М.: РосНОУ, 2013. 368 с.
14. Крюковский А.С., Лукин Д.С., Растягаев Д.В. Классификация и равномерное асимптотическое описание пространственно-временных трёхмерных краевых фокусировок волновых полей. // Радиотехника и электроника, 2005. Т.50. №10. С. 1221–1230.
15. Крюковский А.С., Зайчиков И.В. Особенности распространения радиоимпульсов в средах с дисперсией. // Электромагнитные волны и электронные системы. 2008. Т. 13. № 8. С. 36–41.
16. Kryukovskii A.S., Lukin D.S., Bova Yu.I. Simulation of the field in the vicinity of caustics of ordinary and extraordinary waves during ionospheric propagation // Journal of Communications Technology and Electronics, 2020, Vol. 65, No. 12, pp. 1364–1373.
17. Крюковский А.С., Растягаев Д.В. О необходимых и достаточных условиях образования каспидных катастроф. // Распространение и дифракция волн в неоднородных средах. Сб./ М.: МФТИ, 1989. С.56-60.
18. Аллин И.В., Крюковский А.С. Особенности распространения видеоимпульсов в плазме окрестности светового конуса // Электромагнитные волны и электронные системы. 2007. Т. 12. № 8. С. 26-40.
19. Karepov S.L., Kryukovskii A.S. Calculation of a wave field using the method of local interpolating asymptotics // Journal of Communications Technology and Electronics. 2001. Т. 46. № 1. С. 34–40.