

Преобразование Фурье мультипликативных интегралов в спектрометрии газо-аэрозольных облаков

К.А. Будунова¹

¹ *Институт радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН, 125009, г. Москва, ул. Моховая, 11, корп. 7.*

E-mail: 1917schw@mail.ru

В работе рассмотрены функции, получающиеся при применении операции обратного преобразования Фурье к параметрическим мультипликативным интегралам. Описаны некоторые свойства данных функций. Получено выражение для интерферограммы в методе спектрометрической радиометрии для облака, состоящего из газа и аэрозоля. Показана связь интерферограммы с обратным преобразованием Фурье мультипликативного интеграла.

Ключевые слова: газо-аэрозольное облако, спектрометрическая радиометрия, мультипликативное интегрирование

Fourier Transform of Product Integrals in Spectrometry of Gas-Aerosol Clouds

К.А. Budunova¹

¹ *Kotelnikov Institute of Radioengineering and Electronics of RAS*

The functions obtained with application of inverse Fourier transform to parametric product integrals are considered. Some properties of these functions are described. For the spectroradiometry method, an expression for interferogram of gas-aerosol cloud is given. The relation between the interferogram and the inverse Fourier transform of product integral is shown.

Keywords: gas-aerosol cloud, spectroradiometry, product integration

1. Обратное преобразование Фурье мультипликативного интеграла как интеграл на основе операции свертки

Мультипликативным интегралом [1] называется функционал, получающийся в результате замены в формуле для интеграла операции суммы произведением. В данной работе рассматриваются параметрические мультипликативные интегралы вида

$$P(\omega) = \exp\left(\int_a^b \ln f(x; \omega) dx\right). \quad (1)$$

Положим в формуле (1) $a = 0, b = 1$. Функция $P(\omega)$ может быть выражена пределом $P(\omega) = \lim_{N \rightarrow \infty} P_N(\omega)$, где

$$P(\omega) = \prod_{j=0}^{N-1} (f(j/N; \omega))^{1/N}. \quad (2)$$

Пусть N – фиксированное число и $f(x_0; \omega) \geq 0$ для каждого $x_0 = j/N$, $j = 0, \dots, N-1$, является ограниченной суммируемой с квадратом целой функцией экспоненциального типа $\leq \sigma$. Можно показать, что в этом случае

1) В пространстве обобщенных функций медленного роста существует обратное преобразование Фурье $\varphi(x_0; t)$ функции $f^{1/N}(x_0; \omega)$, причем

$$\underbrace{\varphi(x_0; t) * \varphi(x_0; t) * \dots * \varphi(x_0; t)}_n = F^{-1}[f(x_0; \omega)](t). \quad (3)$$

2) Обратное преобразование Фурье $p_N(t)$ функции $P_N(\omega)$ может быть выражено сверткой

$$p_N(t) = \phi_1(t) * \phi_2(t) * \dots * \phi_N(t), \quad (4)$$

где $\phi_{j+1}(t) = \varphi(j/N; t)$, $j = 0, \dots, N-1$.

Если $P(\omega)$, $P_N(\omega)$ – абсолютно интегрируемые на вещественной оси функции, причем $P_N(\omega)$ сходится к $P(\omega)$ в L_1 , то

$$p(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} p_N(t). \quad (5)$$

Формулы (3), (4), (5) позволяют связать обратное преобразование Фурье мультипликативного интеграла (1) с интегрированием на основе операции свертки.

2. Обратное преобразование Фурье мультипликативных интегралов в спектрорадиометрии

Метод Фурье-спектрорадиометрии позволяет определять распределение и концентрацию загрязняющих веществ в атмосфере. Рассмотрим модель, в которой исследуемое облако загрязняющих веществ имеет размер L_1 находится на расстоянии L_2 от спектрорадиометра. Наблюдаемый экспериментально оптический спектр $B(\nu)$ задается выражением [2]

$$B(\nu) = (\Phi_0(\nu) - P(\nu, T)) \exp(-D_1(\nu)) \exp(-D_2(\nu)) + P(\nu, T), \quad (6)$$

где T – температура трассы и облака, ν – волновое число, $D_1(\nu)$ – оптическая толщина облака, $D_2(\nu)$ – оптическая толщина трассы, $\Phi_0(\nu)$ – спектр излучения подстилающей поверхности, $P(\nu, T)$ – функция Планка. При наличии в облаке аэрозоля величина $D_1(\nu)$ определяется суммой [3]

$$D_1(\nu) = D_1^m(\nu) + D_1^a(\nu). \quad (7)$$

В формуле (7)

$$\begin{aligned} D_1^m(\nu) &= L_1 \sum_{s=1}^S \sigma_s(\nu) n_s, \\ D_1^a(\nu) &= L_1 \int_0^\infty (\sum_{m=1}^M N_m K_m(r, \nu) \pi r^2 g_m(r)) dr, \end{aligned} \quad (8)$$

где n_s – концентрация молекулярной составляющей с номером s , $\sigma_s(\nu)$ – сечение поглощения для s -й составляющей, $s = 1, \dots, S$; N_m – концентрация аэрозольной фракции с номером m , $K_m(r, \nu)$ – фактор эффективности ослабления для m -й фракции, $g_m(r)$ – функция распределения аэрозольных частиц по размерам [4], $m = 1, \dots, M$. Введем связанную с подынтегральным выражением в (8) функцию $\varphi(r, \nu)$:

$$\ln \varphi(r, \nu) = -L_1 \sum_{m=1}^M N_m K_m(r, \nu) \pi r^2 g_m(r).$$

Тогда, в соответствии с (7), (8),

$$\exp(-D_1(\nu)) \exp(-D_2(\nu)) = G(\nu) H(\nu), \quad (9)$$

$$G(\nu) = \exp(-D_1^m(\nu) - D_2(\nu)), \quad H(\nu) = \exp\left(\int_0^\infty \ln \varphi(r, \nu) dx\right). \quad (10)$$

Интерферограмма $I(x)$ для спектра $B(\nu)$ вычисляется по формуле

$$I(x) = \int_0^{+\infty} B(\nu) \cos(2\pi\nu x) d\nu.$$

Используя (7), (9), (10) для интерферограммы можно получить следующее выражение:

$$I(x) = [(f_0 - p_T) * h * g](2\pi x) + p_T(2\pi x). \quad (11)$$

В (11) $f_0(x)$ – косинус-преобразование Фурье функции $\Phi_0(\nu)$, $p_T(x)$ – косинус-преобразование Фурье функции Планка, равное

$$p_T(x) = \frac{2\pi T^4 k^4}{c^2 h^3} q_0\left(\frac{Tkx}{h}\right),$$

где c – скорость света, h – постоянная Планка, k – постоянная Больцмана, $q_0(x)$ – функция, определяемая формулой

$$q_0(x) = \pi^4 \frac{1 + 2\text{ch}^2(\pi x)}{\text{sh}^4(\pi x)} - \frac{3}{x^4}.$$

Функции $g(x)$ и $h(x)$ задаются косинус-преобразованиями Фурье $g(x) = F_c[G(\nu)](x)$, $h(x) = F_c[H(\nu)](x)$. Таким образом,

$$h(x) = 2\pi \text{Re} \left\{ F^{-1} \left[\exp \left(\int_0^\infty \ln \varphi(r, \nu) dr \right) \right] (x) \right\}.$$

3. Пример вычисления обратного преобразования Фурье мультипликативного интеграла

Рассмотрим параметрический мультипликативный интеграл

$$P_a(\omega) = \exp\left(\int_0^a \ln |\text{sinc}(\tau\omega)| d\tau\right), \quad a > 0. \quad (12)$$

Для функции (10) при $a = 1$ справедливы следующие представления:

$$\begin{aligned} P_1(\omega) &= |\text{sinc } \omega| \prod_{k=1}^{\infty} \left\{ e^{-2} \left| 1 + \frac{\omega}{\pi k} \right|^{\frac{\pi k}{\omega}} \left| 1 - \frac{\omega}{\pi k} \right|^{\frac{\pi k}{\omega}} \right\}; \\ P_1(\omega) &= \frac{e}{2|\omega|} \prod_{k=1}^{\infty} \exp(-\text{sinc}(2k\omega)/k). \end{aligned} \quad (13)$$

Мультипликативный интеграл $P_a(\omega)$ связан с функцией $P_1(\omega)$ формулой

$$P_a(\omega) = (P_1(a\omega))^a.$$

Выражение (13) удобно использовать для представления обратного преобразования Фурье $p_a(x) = F^{-1}[P_a(\omega)](x)$ функции $P_a(\omega)$. Так, для $P_2(\omega)$

$$F^{-1}[P_2(\omega)](x) = \frac{e^2}{8} \int_{-\infty}^x dx_1 \int_{-\infty}^{x_1} q(y) dy - C_1 x - C_0,$$

где

$$q(x) = (\delta(x) + \psi_1(x)) * (\delta(x) + \psi_2(x)) * (\delta(x) + \psi_3(x)) * \dots,$$

$$\psi_k(x) = F^{-1} \left[\sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-1)^l 2^l \text{sinc}^l(4k\omega)}{k^l l!} \right] (x),$$

$$C_0 = \frac{e^2}{8} \int_{-\infty}^0 dx_1 \int_{-\infty}^{x_1} q(y) dy - \int_{-\infty}^{+\infty} P_2(\omega) d\omega, \quad C_1 = \frac{e^2}{8} \int_{-\infty}^0 q(y) dy.$$

Графики некоторых функций $p_a(x)$ показаны на рисунке 1.

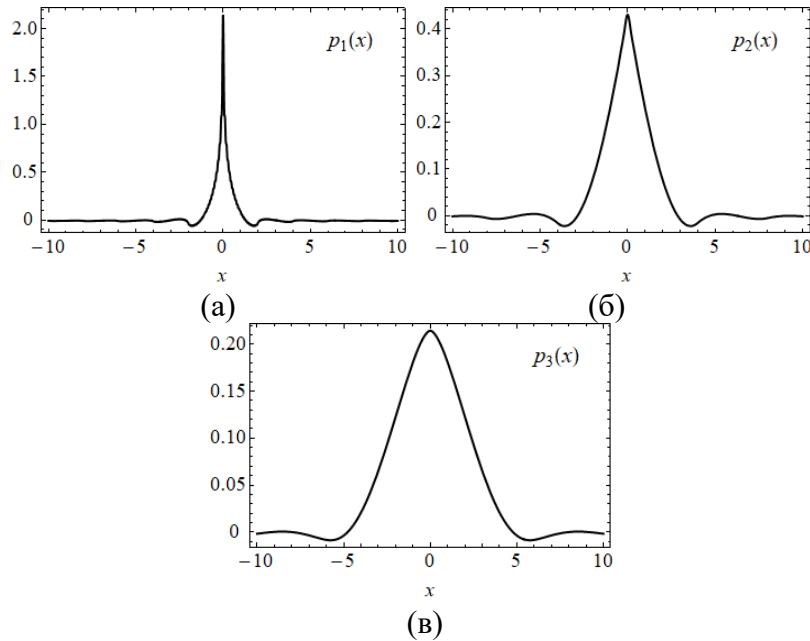


Рис. 1. Результаты приближенного вычисления обратного преобразования Фурье $p_a(x)$ функции $P_a(\omega)$ для $a = 1$ (а), $a = 2$ (б), $a = 3$ (в).

Заключение

Рассмотрена операция обратного преобразования Фурье для параметрического мультипликативного интеграла. Приведен пример расчета функций, являющихся результатом данного преобразования. В методе спектрорадиометрии для облака, содержащего аэрозоль, получена формула интерферограммы, включающая обратное преобразование Фурье мультипликативного интеграла.

Литература

1. Slavik A. Product Integration, its History and Applications. – Prague: Matfyzpress, 2007.
2. Морозов А.Н., Светличный С.И. Основы Фурье-спектрорадиометрии. –М.: Наука, 2006.
3. Тимофеев Ю.М., Васильев А.В.. Теоретические основы атмосферной оптики. –СПб: Наука, 2003.
4. Зуев В.Е, Кабанов М.В. Современные проблемы атмосферной оптики. Том 4: Оптика атмосферного аэрозоля. – Л.: Гидрометеиздат, 1987.