

Способ построения сложных сигналов на основе манипулирующих последовательностей Лежандра

А.П. Черкашин¹, А.А. Ерунов¹

¹ Военно-космическая академия имени А.Ф. Можайского
197198, г. Санкт-Петербург, ул. Ждановская, 13.
E-mail: vka.mil.ru

В статье представлено описание способа построения бинарных последовательностей Лежандра, выполнена программная реализация в среде MatLab для получения последовательностей Лежандра большой длины, а также предложен подход, связанный с блочной синхронизацией сигналов, модулированных минимаксными последовательностями

Ключевые слова: M-последовательность, последовательность Лежандра, автокорреляционная функция, боковые лепестки, анализ последовательностей.

Formation of complex phase-manipulated signals based on legendre sequences

A.P.Cherkashin, ¹ A.A. Erunov¹

¹ Mozhaitskiy Military Space Academy.

The article describes a method for constructing binary Legendre sequences, performs a software implementation in MatLab to obtain long-length Legendre sequences, and also suggests an approach related to block synchronization of signals modulated by minimax sequences.

Keywords: M-sequence, Legendre sequence, autocorrelation function, side lobes, sequence analysis.

Введение

В настоящее время в системах связи, радиолокации и радионавигации широко применяются сложные сигналы, имеющие хорошие корреляционные свойства [1-3].

В простейшем виде сложный сигнал $A(t)$ рассматривается как сумма N простых сигналов $a_i(t)$, которые могут отличаться амплитудой, частотой либо начальной фазой. При этом число N составляющих будет определять базу сложного сигнала [1-3].

Способ построения бинарных последовательностей Лежандра

В статье в качестве сложного сигнала будет рассматриваться фазоманипулированный сигналы гармонического колебания с частотой ω .

$$A(t) = \sum_{i=1}^N a_i \cos(\omega t) \quad (1)$$

Поскольку форму сигнала определяют кодовые манипулирующие последовательности (КМП) $A=\{a_i, i \in 1 \dots N\}$., то корреляционные свойства сложных сигналов оцениваются при помощи периодической и аperiodической автокорреляционной функции (ПАКФ и ААКФ) используемых КМП [1- 5].

При вычислении ПАКФ осуществляется сравнение КМП A со своей копией смещенной на m отсчетов на периоде N :

$$R_{\text{ПАКФ}}(m) = \sum_{i=1}^N a_i \times a_{i+m} \quad (2)$$

в то время как для оценивания ААКФ сравниваются только $N-m$ членов КМП

$$R_{ААКФ}(m) = \sum_{i=1}^{N-m} a_i \times a_{i+m} . \quad (3)$$

Считается, что КМП обладают идеальной ПАКФ [2,4], если для всех возможных сдвигов $m=1 \dots N-1$ взаимная корреляция равна 0 (Уровень боковых лепестков ПАКФ=0).

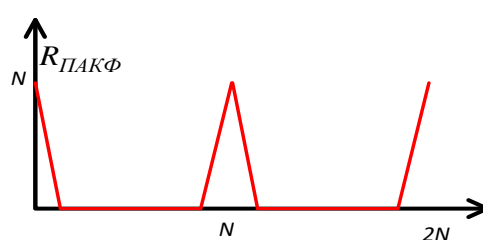


Рис.1 Пример идеальной ПАКФ

Так, для КМП с бинарным алфавитом ($a_i = \pm 1$) согласно формулы (2) необходимым условием наличия идеальной ПАКФ является размер периода КМП, кратный 4. Поскольку при произведении всех пар $a_i \times a_{i+m}$ результатом является целое значение ± 1 , то общее число + и - должно быть одинаково и кратно 2.

На периодах $N=4t$ для всех известных t идеальной ПАКФ обладает только последовательность [1 1 1 -1], поэтому для бинарного алфавита основным классом с хорошими корреляционными свойствами являются минимаксные кодовые последовательности.

Минимаксные кодовые последовательности имеют ПАКФ $R_{ПАКФ}$ не превышающую ± 1 при $m=1 \dots N-1$.

Наиболее известными из них являются:

- m-последовательности и производные от них коды Голда и Касами;
- последовательности Баркера;
- последовательности Лежандра.

Недостатком последовательностей Баркера является их небольшой период определения. В настоящее время известны последовательности Баркера длиной N не более 13, а для обеспечения высоких значений отношения сигнал шум даже при использовании минимаксных кодовых последовательностей могут потребоваться последовательности с большим периодом N .

По этой причине в действующих широкополосных системах связи, а также радиолокации в основном используются m-последовательности с периодом определения $N=2^n-1$. Так как с ростом длины m- последовательности пропускная способность канала снижается в N раз, целесообразно использовать последовательности с периодом имеющими меньший шаг.

К таким минимаксным последовательностям относятся последовательности Лежандра. Данные последовательности строятся над простым полем Галуа GF(p) с периодом $p=N$ кратным $4t-1$. Элементы поля GF(p) принимают значения от 0 до $p-1$ и подчиняются правилам арифметики по модулю p . Поскольку любой ненулевой элемент a поля GF(p) есть некоторая степень примитивного элемента ε , то вполне естественно назвать показатель этой степени логарифмом элемента a по основанию ε :

$$a = \varepsilon^m \Rightarrow m = \log_{\varepsilon} a . \quad (4)$$

Последовательность Лежандра строится по правилу:

$$a_i = \begin{cases} 1, i = 0 \bmod(p) \\ g(i), i \neq 0 \bmod(p) \end{cases} .$$

При этом элемент $g(i)$ зависит от четности логарифма элемента a , принимающего ненулевые значения

$$g_i = \begin{cases} 1, \log_{\varepsilon}(a) - \text{четный} \\ -1, \log_{\varepsilon}(a) - \text{нечетный} \end{cases} \quad (5)$$

Поскольку элемент $a=\varepsilon^m$ для удобства определения четности логарифмов в простом поле Галуа $GF(p)$ представим по аналогии с таблицами Кэли степенную таблицу Кэли. В строках будет основание ε , в столбцах степень m , на пересечении результат вычисления по модулю p .

$\varepsilon \backslash m$	0	1	2	3	4	5
1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	4	1	2	4
3	1	3	2	6	4	5
4	1	4	2	1	4	2
5	1	5	4	6	2	3
6	1	6	1	6	1	6

В поле $GF(7)$ элементы $\varepsilon=3$ и 5 является примитивным, поскольку возведение их в степень $m=1\dots 6$ формирует все различные ненулевые элементы поля $GF(7)$. Как видно из данной таблицы логарифмы элементов 1, 2, и 4 четны, тогда как элементов 3, 5 и 6 – нечетны. Расставим на указанных позициях соответствующие значения ± 1 и получим последовательность Лежандра:

$$A = \{ a_0 + + - + - - \}.$$

При этом по аналогии с m -последовательностью последовательность Лежандра также можно модифицировать:

- заменой первого элемента a_0 на -1;
- циклическим сдвиг исходной последовательности;
- инвертированием (умножением на -1) всех ее элементов.

Представленный в работе [4] способ построения последовательность Лежандра оказывается неудобным для больших значений периода N при поиске примитивного элемента. По этой причине в работе предлагается альтернативный способ на основе обратных по умножению элементов a^{-1} в поле $GF(7)$

$$a \times a^{-1} = 1 \bmod(p). \quad (6)$$

Заменим элементы a на их степенное представление

$$\varepsilon^m \cdot \varepsilon^{-m} = \varepsilon^m \cdot \varepsilon^{p-1-m} = 1 \bmod(p). \quad (7)$$

Поскольку нас интересует только четность степени m основания ε то условие 5 можно заменить на условие

$$g_i = \begin{cases} 1, \varepsilon^m = 1 \bmod(p), m - \text{нечетно} \\ -1, \varepsilon^m = 1 \bmod(p) - m - \text{четно} \end{cases}$$

Перестановка знаков в условие происходит за счет использования обратного элемента a^{-1} .

Вернемся к степенной таблице Кэли. Как из нее видно степени элементов 1, 2, и 4 нечетны, тогда как элементов 3, 5 и 6 – четны. Расставим на указанных позициях соответствующие значения ± 1 и получим последовательность Лежандра:

$$A = \{ a_0 + + - + - - \}.$$

$\varepsilon \backslash m$	1	2	3	4	5	6
1	1	1	1	1	1	1
2	2	4	1	2	4	1
3	3	2	6	4	5	1
4	4	2	1	4	2	1
5	5	4	6	2	3	1
6	6	1	6	1	6	1

На основе представленного в статье способа построения последовательностей Лежандра в среде Matlab была разработана программа. Однако, при построение степенных таблиц Кэли при расчете ε^m для поля $GF(p)$ при $p=N>23$ приводило к переполнению памяти

В этой связи, понадобилось адаптировать программный код с учетом мультипликативности элементов простого поля $GF(p)$

$$(A \times B) \bmod(p) = (A \bmod(p) \times B \bmod(p)) \bmod(p).$$

Разложение любого числа $a=\varepsilon^m$ на множители:

$$\varepsilon^m \bmod(p) = (\varepsilon^k \bmod(p) \times \varepsilon^{m-k} \bmod(p)) \bmod(p)$$

при формировании степенных таблиц Келли позволило построить последовательности Лежандра с длиной N до 30000 элементов. Результаты работы программы представлены на рисунке 2.

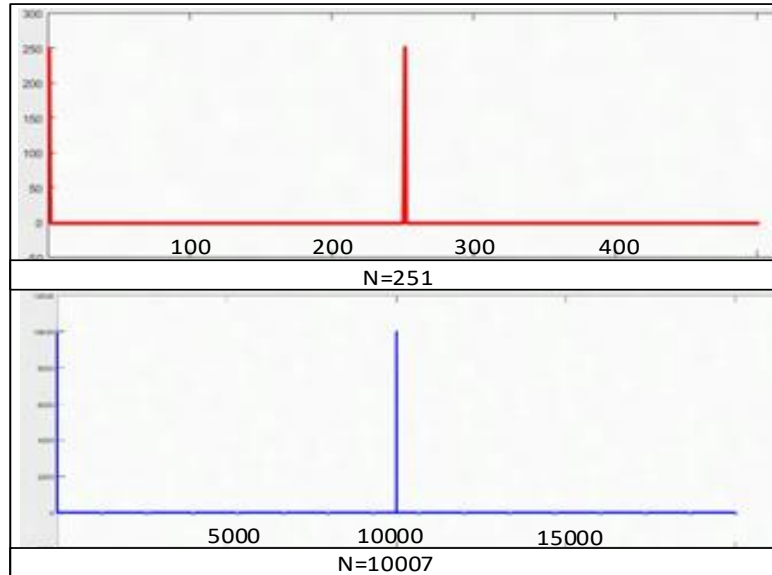


Рис.2. Расчет $R_{\text{ПАКФ}}$ последовательностей Лежандра

Заключение

Так на интервале N до 10000 существует 617 последовательностей Лежандра, в то время как m -последовательности в данном диапазоне представлены только на 12 периодах. Данное обстоятельство позволяет говорить о предпочтительности выбора минимаксных последовательностей Лежандра при адаптивном помехоустойчивом кодировании.

Литература

1. Цветков К. Ю., Акмоллов А. Ф., Коровин В. М. Теория электрической связи. учеб. пособие. – СПб.: ВКА имени А.Ф. Можайского, 2014. – 116 с.
2. Френкс Л. Теория сигналов / пер. с англ.; под ред. Д. Е. Вакмана. – М.: Сов. радио, 1974. – 152 с.
3. Цветков К. Ю., Коровин В. М. Дискретный гармонический анализ и его приложения к задачам синтеза оптимальных сигналов: монография - СПб.: ВКА имени А.Ф.Можайского, 2008. - 108 с.
4. Широкополосные сигналы и системы. Курс лекций (<https://siblec.ru/telekommunikatsii/shirokopolosnye-signal-y-i-sistemy>)
5. Ерунов А.А. Методы построения ортогональных базисов для цифровой обработки сигналов // Известия института инженерной физики – 2024 – №4 (74), с.24-34.