Хабалов В.А.
Научный руководитель: старший преподаватель Кутарова Е.И.
Муромский институт (филиал) федерального государственного образовательного учреждения высшего образования «Владимирский государственный университет имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»
602264, г. Муром, Владимирская обл., ул. Орловская, 23
e-mail: y-men.y-men.y-men@mail.ru

Вычисление пределов с использованием локальной формулы Тейлора

Первое корректное определение предела числовой функции было дано известным французским математиком О. Коши в 1821 г. Символ lim, употребляемый в обозначении предела, составляется из первых трёх букв латинского слова limes, обозначающего «предел».
Одним из самых мощных методов раскрытия неопределенностей и вычисления пределов является разложение функций в степенной ряд Тейлора. Когда непосредственное нахождение предела какой – либо функции представляется сложным, вычислить предел можно с помощью формулы Тейлора. Если функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки a и если существует конечная производная n-го порядка $f^{(n)}(a)$, то имеет место локальная формула Тейлора:

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+...+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\theta((x-a)^n)\cdot$$

В случае $a=0$ формула называется формулой Маклорена:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\theta(x^n)\cdot$$

Требуется вычислить предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)$.

Имеем неопределенность вида $\{\infty-\infty\cdot 0\}$. Так как при $x\to\infty$ величина $\frac{1}{x}$ является бесконечно малой, можем применить готовое разложение, в котором величина $\frac{1}{x}$ будет «играть роль» x:

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\theta(x^n)\cdot$$

Предполагая, что функцию $f(x)$ можно разложить по формуле Маклорена, ограничимся первыми отличными от нуля членами в разложении этой функции:

$$\lim_{x\to\infty}\left(x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)=\lim_{x\to\infty}\left(x-x^2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)^2+\theta\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{2}+x^2\cdot\theta\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)=\frac{1}{2}\cdot$$

Здесь по определению понятия θ – бесконечно малое:

$$\lim_{x\to\infty}x^2\cdot\theta\left(\frac{1}{x^2}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\theta\left(\frac{1}{x^2}\right)}{\frac{1}{x^2}}=0\cdot$$

Литература

1. Литова Г.Г., Ханукаева Д.Ю. Пределы. Пособие для студентов, обучающихся по специальности «Прикладная математика». – М.: РГУ нефти и газа имени И.М. Губкина, 2012. – 115с.

2. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике. Т.1. – М.: Айрис-пресс, 2004. 253с.