Жиганов С.Н., Михеев К.В.
Муромский институт (филиал) федерального государственного образовательного учреждения высшего образования «Владимирский государственный университет имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»
602264, г. Муром, Владимирская обл., ул. Орловская, 23
E-mail: s_zh_72@mail.ru

Сравнение методов аппроксимации гармонической функции

При реализации операций вычисления различных функциональных зависимостей в современных вычислительных устройствах, при формировании гармонических сигналов в цифровых синтезаторах частот, при формировании тестовых воздействий в современных информационно-измерительных системах используют методы аппроксимации. Существует огромное количество методов аппроксимации функциональных зависимостей. Наиболее пригодный для реализации в современных цифровых устройствах является метод, основанный на полиномах Чебышева [1,2], обеспечивающий наименьшие вычислительные затраты при его реализации при заданной точности по сравнению с другими методами. Существуют различные методы нахождения коэффициентов полиномов Чебышева, некоторые из них можно найти в работах [3-5]. В работе проводится сравнение двух методов вычисления коэффициентов полиномов Чебышева второго порядка на примере аппроксимации функции sin(x) на интервале изменения значений аргумента от нуля до π. При этом рассматриваются метод минимизирующий максимальную ошибку аппроксимации на интервале значения функции и метод минимизирующий площадь ошибки.

При аппроксимации функции f(x) будем использовать полином Чебышева порядка n вида

$$L_n\left(x\right) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n = \sum_{i=1}^{n} a_i x^n \ , \qquad (1)$$

где a_0, …, a_{n+1} – коэффициенты полинома.

При сравнении методов вычисления коэффициентов полинома (1) в качестве f(x) возьмем функцию синуса на интервале значений x $\in[0, \pi]$, т.е. f(x) = sin(x), а степень полинома выберем вторую, т.е. n = 2, а

$$L_2\left(x\right) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 . \qquad (2)$$

Из (2) видно, что для задания полинома необходимо определить три коэффициента: a_0, a_1 и a_2. Ошибки аппроксимации описываются функцией

$$\delta(x) = f(x) - L_2(x) = \sin(x) - L_2(x) = \sin(x) - \ a_0 + a_1 x + a_2 x^2 . \qquad (3)$$

Площадь ошибок аппроксимации функции можно определить из соотношения

$$S = \int\limits_{x_{\min}}^{x_{\max}} \left| f\left(x\right) - L_2\left(x\right) \right| dx = \int\limits_{0}^{\pi} \left| \sin\left(x\right) - a_0 - a_1 x - a_2 x^2 \right| dx . \qquad (4)$$

Первый метод нахождения коэффициентов полинома (1) основан на том, что максимальные значения ошибок на всем интервале значения x будут принимать одинаковые значения. Этот метод подробно описан в [5], там же получено выражение для полинома, которое имеет вид

$$L_2^1(x) = -0,405\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 + 0,97 . \qquad (5)$$

В выражении (5) верхний индекс в обозначении полинома $L_2(x)$ определяет номер метода.

При использовании этого полинома максимальное значение ошибки аппроксимации составляет $\delta_{\max} = 0,03$, а площадь под кривой ошибок составляет $S^1 = 0,055$.

Второй метод нахождения коэффициентов полинома (1) основан на минимизации площади под кривой ошибок δ(x), т.е. необходимо найти коэффициенты полинома таким образом, чтобы выражение (4) было минимальным. Поскольку разность f(x) – $L_2(x)$ принимает положительные и отрицательные значения на интервале значений функции, то решать интеграл (4) необходимо на подинтервалах. Результатом решения будет некоторая функция, зависящая от трех неизвестных коэффициентов a_0, a_1 и a_2 – $S(a_0, a_1, a_2)$.

Для нахождения значений коэффициентов, минимизирующих выражение (4) необходимо решить систему уравнений вида

$$\begin{cases} \frac{\partial S\left(a_0, a_1, a_2\right)}{\partial a_0} = 0 \\ \frac{\partial S\left(a_0, a_1, a_2\right)}{\partial a_1} = 0 \\ \frac{\partial S\left(a_0, a_1, a_2\right)}{\partial a_2} = 0 \end{cases}. \qquad (6)$$

Средствами программы MathCAD была решена система уравнений (6) для разных исходных данных. В работе проведено сравнение двух описанных методов расчета коэффициентов полинома Чебышева второго порядка, применяемого при аппроксимации функции sin(x) на интервале $x \in [0, \pi]$.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 18-37-00077.

Литература

1. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. – М.: Лаборатория Базовых Знаний. - 2000. – 624с.
2. Ремез Е.Я. Основы численных методов чебышевского приближения. – Киев.: Наукова Думка. - 1969. – 625 с.
3. Chekushkin V.V., Panteleev I.V., Mikheev K.V. Improving Polynomial Methods of Reconstruction of Functional Dependences in Information-Measuring Systems. Measurement Techniques July 2015, Volume 58, Issue 4, PP 385-392. ISSN 0543-1972.
4. Galushkin A.I., Danilin S.N., Shchanikov S.A. The research of memristor-based neural network components operation accuracy in control and communication systems // Source of the Document 2015 International Siberian Conference on Control and Communications, SIBCON 2015 - Proceedings. 2015. PP. 1-6. (DOI: 10.1109/SIBCON.2015.7147034)
5. Чекушкин В.В., Булкин В.В. Вычислительные процессы в информационно-измерительных системах: учеб. пособие. — Изд.-полиграфический центр МИ ВлГУ. - 2009. - 120с.