

Жиганов С.Н., Михеев К.В., Ракитин А.В.

Муромский институт (филиал) федерального государственного образовательного учреждения высшего образования «Владимирский государственный университет имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»
602264, г. Муром, Владимирская обл., ул. Орловская, 23
E-mail: s_zh_72@mail.ru

Многочлены Лежандра в задачах аппроксимации функциональных зависимостей

При реализации операций вычисления различных функциональных зависимостей в современных вычислительных устройствах, при формировании гармонических сигналов в цифровых синтезаторах частот, при формировании тестовых воздействий в современных информационно-измерительных системах широко применяют методы аппроксимации. Существует огромное количество методов аппроксимации функциональных зависимостей. В работе [1] показано, что для ортогональных многочленов $f_k(x)$ на отрезке $[a; b]$ с весовой функцией $\omega(x)$ при $m \neq n$ должно выполняться следующее условие

$$\int_a^b f_m(x)f_n(x) \omega(x)dx = 0. \quad (1)$$

При $\omega(x) = 1$ получаем многочлены Лежандра. Для этих многочленов при $n \geq 1$ справедлива рекуррентная формула вида

$$P_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{n+1}xP_n(x) - \frac{n}{n+1}P_{n-1}(x), \quad (2)$$

при этом первые две функции равны $P_0(x) = 1, P_1(x) = x$.

На рис. 1 приведены графики первых десяти полиномов Лежандра при $x \in [-1; 1]$.

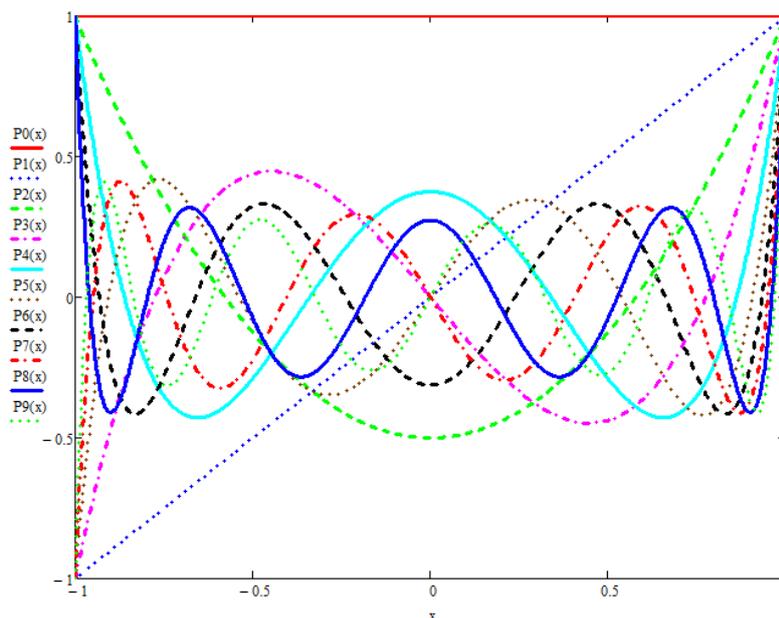


Рис. 1. - Полиномы Лежандра

Аппроксимирующая функции $\psi(x)$ получается из соотношения

$$\psi(x) = c_0 + c_1P_1(x) + c_2P_2(x) + \dots \quad (3)$$

коэффициенты которого рассчитываются по формуле

$$c_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 f(x)P_n(x)dx, n = 0,1,2, \dots \quad (4)$$

В работе рассмотрено разложение функции корня $f(x) = \sqrt{x}$ на интервале значений $[0, 1]$ с использованием многочленов Лежандра до 9 порядка. В таблице 1 приведены значения

максимальных отклонений от эталонной функции и значения полученной площади ошибки для разных полиномов. На рис. 2 приведен график ошибок аппроксимации при использовании многочлена Лежандра 9 степени. Из рис. 2 видно, что на интервале аппроксимации функции максимальные отклонения ошибки аппроксимации принимают разные значения, причем максимальное отклонение соответствует левой границе интервала $x = 0$.

Таблица 1

Порядок полинома	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
δ_+	0,333	0,046	0,029	0,017	0,013	0,01	$9,1 \cdot 10^{-3}$	$7,9 \cdot 10^{-3}$	$6,9 \cdot 10^{-3}$	$6,3 \cdot 10^{-3}$
δ_-	0,637	0,267	0,171	0,127	0,097	0,062	0,043	0,063	0,056	0,05
$S_{\text{ош}}$	0,198	0,037	0,015	$7,7 \cdot 10^{-3}$	$4,6 \cdot 10^{-3}$	$3 \cdot 10^{-3}$	$2,1 \cdot 10^{-3}$	$1,6 \cdot 10^{-3}$	$1,2 \cdot 10^{-3}$	$9,1 \cdot 10^{-4}$

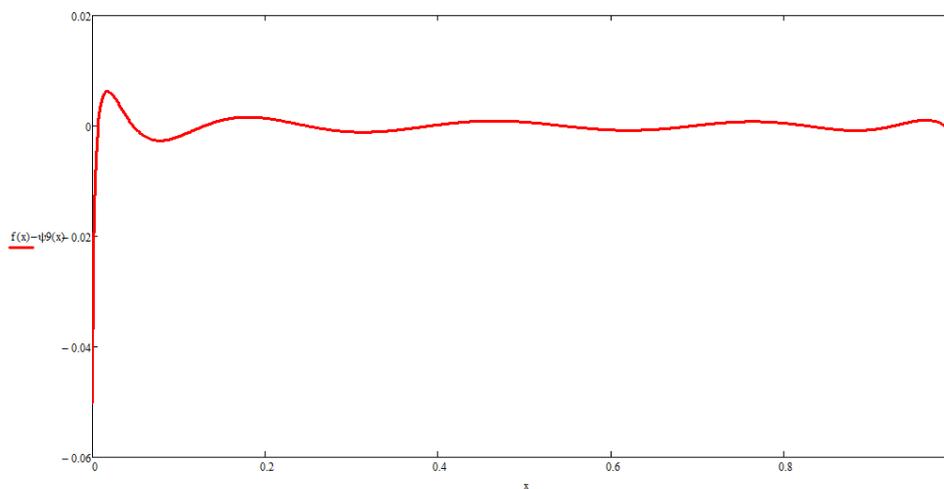


Рис.2. - - График ошибок аппроксимации функции $f(x) = \sqrt{x}$ при использовании полиномов Лежандра девятого порядка

Из таблицы 1 видно, что с увеличением порядка полинома точность аппроксимации повышается – уменьшаются значения максимальных отклонений от истинного значения и уменьшается площадь ошибки. Работа продолжает исследования начатые в [2-4].

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 18-37-00077 и конкурса инновационных проектов Владимирской области «УМНИК-2018».

Литература

1. Прасолов В.В. Многочлены. – 4-е изд., исправленное. – М.: МЦНМО, 2014. – 336 с.
2. Chekushkin V.V., Panteleev I.V., Mikheev K.V. Improving Polynomial Methods of Reconstruction of Functional Dependences in Information-Measuring Systems. Measurement Techniques July 2015, Volume 58, Issue 4, PP 385-392. ISSN 0543-1972.
3. Galushkin A.I., Danilin S.N., Shchanikov S.A. The research of memristor-based neural network components operation accuracy in control and communication systems // Source of the Document 2015 International Siberian Conference on Control and Communications, SIBCON 2015 - Proceedings. 2015. PP. 1-6. (DOI: 10.1109/SIBCON.2015.7147034)
4. Chekushkin V.V., Zhiganov S.N. Computational methods in optimization of engineering problems // Raleigh, North Carolina, USA: Open Science Publishing, 2018. 202 p.