Жиганов С.Н., Михеев К.В., Ракитин А.В., Ушаков В.А.
Муромский институт (филиал) федерального государственного образовательного учреждения высшего образования «Владимирский государственный университет имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»
602264, г. Муром, Владимирская обл., ул. Орловская, 23
E-mail: s_zh_72@mail.ru

Многочлены Чебышева первого рода в задачах аппроксимации функциональных зависимостей

При реализации операций вычисления различных функциональных зависимостей в современных вычислительных устройствах, при формировании гармонических сигналов в цифровых синтезаторах частот, при формировании тестовых воздействий в современных информационно-измерительных системах широко применяют методы аппроксимации. Существует огромное количество методов аппроксимации функциональных зависимостей. В работе [1] показано, что для ортогональных многочленов $f_k(x)$ на отрезке [a; b] с весовой функцией $\omega(x)$ при m≠n должно выполнятся следующее условие

$$\int_a^b f_m(x) f_n(x)\, \omega(x) dx = 0. \qquad (1)$$

При $\omega(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ получаем многочлены Чебышева первого рода. Для этих многочленов при $n \geq 1$ справедлива рекуррентная формула вида

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x), \qquad (2)$$

при этом первые две функции равны $T_0(x) = 1, T_1(x) = x$.

На рис. 1 приведены графики первых десяти полиномов Чебышева первого рода при $x \in [-1; 1]$.

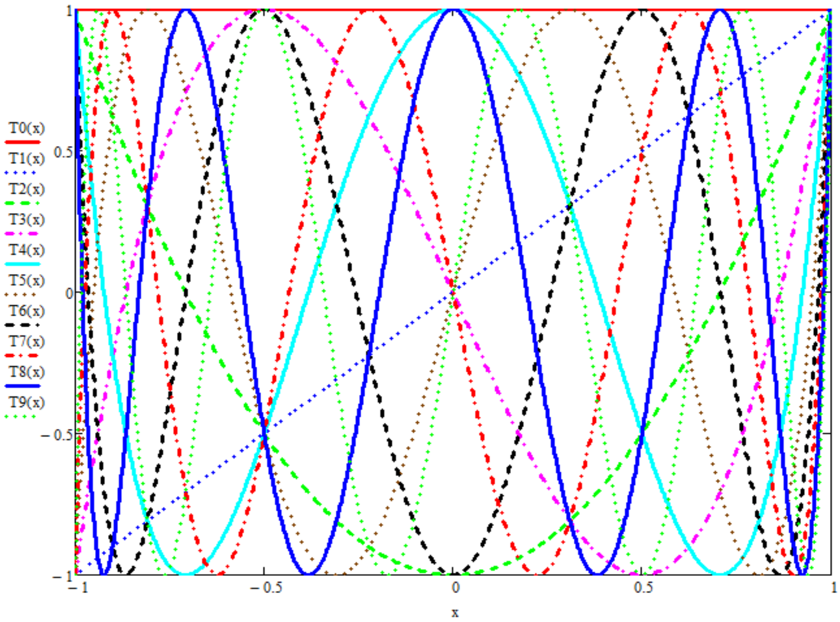

Рис. 1. - Полиномы Чебышева первого рода

Аппроксимирующая функции $\psi(x)$ получается из соотношения

$$\psi(x) = c_0 + c_1 T_1(x) + c_2 T_2(x) + \cdots \qquad (3)$$

коэффициенты которого рассчитываются по формуле

$$c_n = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{f(x) T_n(x)}{\sqrt{1 - x^2}} dx, n = 0,1,2, \ldots \qquad (4)$$

В работе рассмотрено разложение функции корня $f(x) = \sqrt{x}$ на интервале значений [0, 1] с использованием многочленов Чебышева первого рода до 9 порядка. В таблице 1 приведены значения максимальных отклонений от эталонной функции и значения полученной площади ошибки для разных полиномов. На рис. 2 приведен график ошибок аппроксимации при использовании многочлена Чебышева первого рода 9 степени. Из рис. 2 видно, что на интервале аппроксимации функции максимальные отклонения ошибки аппроксимации принимают разные значения, причем максимальное отклонение соответствует левой границе интервала x = 0.

Таблица 1

Порядок полинома	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
δ_+	0,363	0,082	0,046	0,032	0,025	0,02	0,017	0,015	0,013	0,012
δ_-	0,637	0,212	0,127	0,091	0,071	0,058	0,049	0,042	0,037	0,034
$S_{ош}$	0,03	0,05	0,022	0,012	$7{,}98 \cdot 10^{-3}$	$5{,}56 \cdot 10^{-3}$	$4{,}08 \cdot 10^{-3}$	$3{,}13 \cdot 10^{-3}$	$2{,}47 \cdot 10^{-3}$	$2 \cdot 10^{-3}$

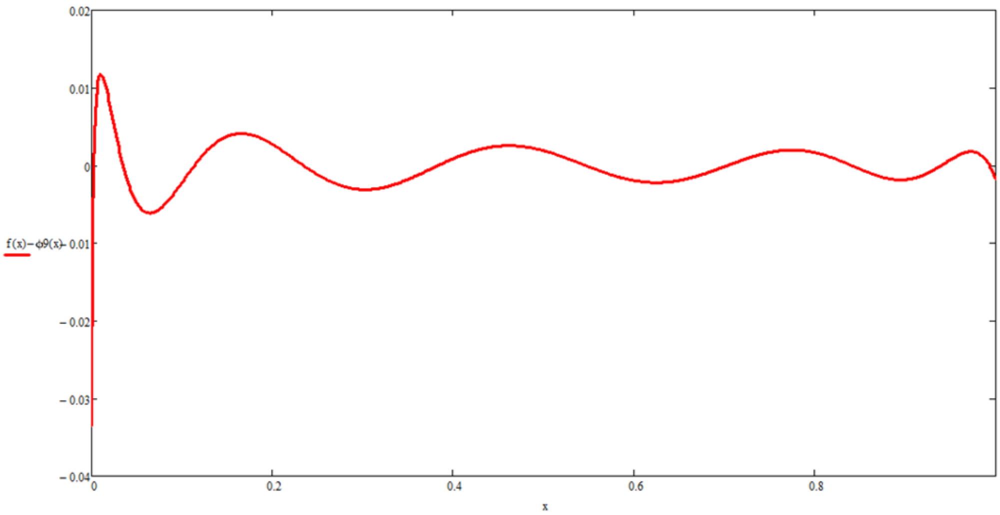

Рис.2. - - График ошибок аппроксимации функции $f(x) = \sqrt{x}$
при использовании полиномов Чебышева первого рода девятого порядка

Из таблицы 1 видно, что с увеличением порядка полинома точность аппроксимации повышается – уменьшаются значения максимальных отклонений от истинного значения и уменьшается площадь ошибки. Работа продолжает исследования начатые в [2-4].

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 19-07-01215 и конкурса инновационных проектов Владимирской области «УМНИК-2018».

Литература

1. Прасолов В.В. Многочлены. – 4-е изд., исправленное. – М.: МЦНМО, 2014. – 336 с.
2. Chekushkin V.V., Panteleev I.V., Mikheev K.V. Improving Polynomial Methods of Reconstruction of Functional Dependences in Information-Measuring Systems. Measurement Techniques July 2015, Volume 58, Issue 4, PP 385-392. ISSN 0543-1972.
3. Galushkin A.I., Danilin S.N., Shchanikov S.A. The research of memristor-based neural network components operation accuracy in control and communication systems // Source of the Document 2015 International Siberian Conference on Control and Communications, SIBCON 2015 - Proceedings. 2015. PP. 1-6. (DOI: 10.1109/SIBCON.2015.7147034)
4. Chekushkin V.V., Zhiganov S.N. Computational methods in optimization of engineering problems // Raleigh, North Carolina, USA: Open Science Publishing, 2018. 202 p.