Жиганов С.Н., Жиганова Е.А., Ушаков В.А.
Муромский институт (филиал) федерального государственного образовательного учреждения высшего образования «Владимирский государственный университет имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»
602264, г. Муром, Владимирская обл., ул. Орловская, 23
E-mail: s_zh_72@mail.ru

Сравнение полиномиальных методов аппроксимации функциональных зависимостей на основе многочленов Чебышева первого и второго рода

Высокоскоростные процессоры цифровой обработки, как правило, могут выполнять ограниченное число операций и для реализации различных функциональных зависимостей широко применяются различные методы аппроксимации. Полиномиальные методы очень хорошо подходят в этом случае, поскольку в их основе лежать две элементарные операции – умножение и сложение чисел. Для того, чтобы многочлены $f_k(x)$ можно использовать в аппроксимации функциональных зависимостей на отрезке [a; b], как показано в работе [1], они должны быть ортогональными, т.е. должно выполняться условие при m≠n

$$\int_a^b f_m(x) f_n(x)\, \omega(x) dx = 0, \tag{1}$$

где $\omega(x)$ – весовая функция.

При $\omega(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ получаем многочлены Чебышева первого рода. Для этих многочленов при $n \geq 1$ справедлива рекуррентная формула вида

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x), \tag{2}$$

при этом первые две функции равны $T_0(x) = 1, T_1(x) = x$.

На рис. 1 приведены графики первых десяти полиномов Чебышева первого рода на отрезке $x \in [-1; 1]$.

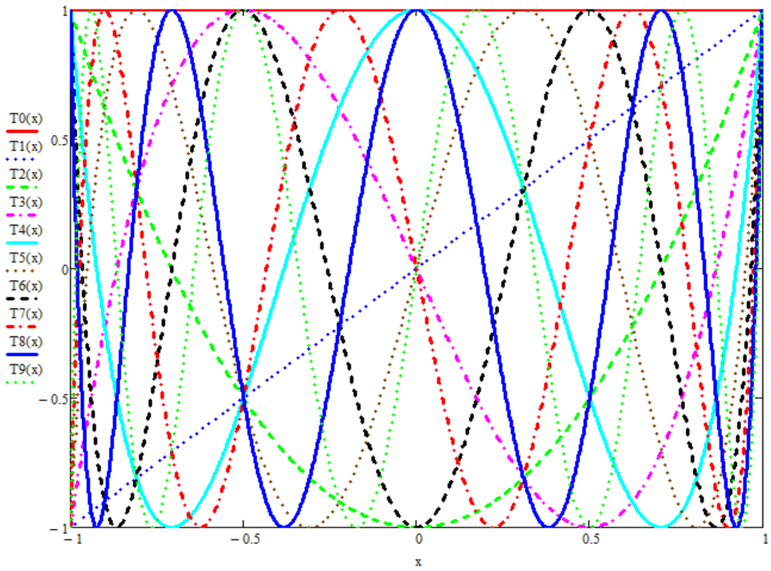

Рис. 1. - Полиномы Чебышева первого рода

Аппроксимирующая функции $\psi(x)$ получается из соотношения

$$\psi(x) = c_0 + c_1 T_1(x) + c_2 T_2(x) + \cdots, \tag{3}$$

коэффициенты которого рассчитываются по формуле

$$c_n = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{f(x) T_n(x)}{\sqrt{1 - x^2}} dx, n = 0,1,2, \dots. \tag{4}$$

Многочлены Чебышева второго рода $U_n(x)$ могут быть определены с помощью рекуррентного соотношения при $U_0(x) = 1$ и $U_1(x) = 2x$:

$$U_{n+1}(x) = 2xU_n(x) - U_{n-1}(x); \quad (5)$$

На рис. 1.6 приведены графики полиномов Чебышева второго рода на интервале значений $x \in [-1; 1]$.

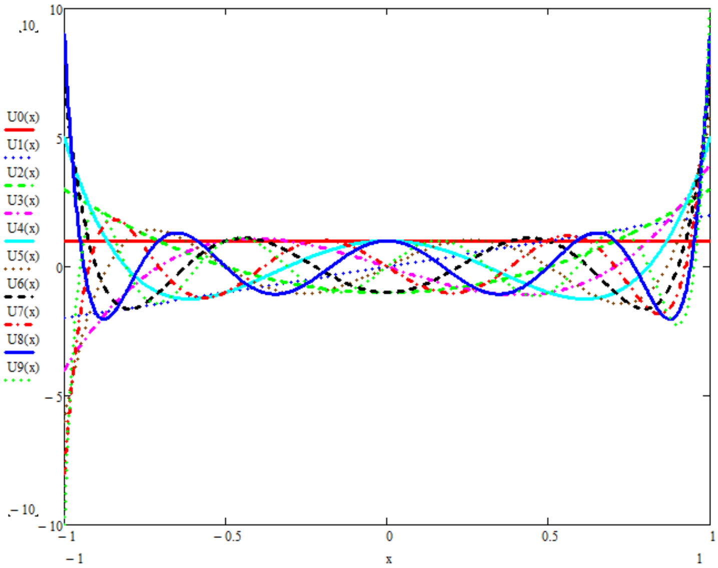

Рис.2. – Полиномы Чебышева второго рода

Как видно из рис. 1 и 2 полиномы Чебышева второго рода, в отличии от полиномов первого рода на краях интервала принимают значения больше единицы, хотя как и полиномы первого рода центрированы и являются четной или нечетной функцией.

В работе рассмотрено разложение функции корня $f(x) = \sqrt{x}$ на интервале значений [0, 1] с использованием многочленов Чебышева первого и второго рода до 9 порядка. Полиномы Чебышева первого и второго рода могут обеспечить достаточно высокие показатели эффективности, причем точность аппроксимации полиномов Чебышева второго рода выше чем первого, однако эти полиномы получаются только для двух конкретных весовых функций и других значений полиномов не существует, кроме того в ряде случает, так же приходится использовать численные методы для расчета коэффициентов полиномов. Работа продолжает исследования начатые в [2-4].

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 19-07-01215.

Литература

1. Прасолов В.В. Многочлены. – 4-е изд., исправленное. – М.: МЦНМО, 2014. – 336 с.
2. Chekushkin V.V., Panteleev I.V., Mikheev K.V. Improving Polynomial Methods of Reconstruction of Functional Dependences in Information-Measuring Systems. Measurement Techniques July 2015, Volume 58, Issue 4, PP 385-392. ISSN 0543-1972.
3. Galushkin A.I., Danilin S.N., Shchanikov S.A. The research of memristor-based neural network components operation accuracy in control and communication systems // Source of the Document 2015 International Siberian Conference on Control and Communications, SIBCON 2015 - Proceedings. 2015. PP. 1-6. (DOI: 10.1109/SIBCON.2015.7147034)
4. Chekushkin V.V., Zhiganov S.N. Computational methods in optimization of engineering problems // Raleigh, North Carolina, USA: Open Science Publishing, 2018. 202 p.