Ермолаев В.А.
Муромский институт (филиал) федерального государственного образовательного учреждения высшего образования «Владимирский государственный университет имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»
602264, г. Муром, Владимирская обл., ул. Орловская, 23
e-mail: kaf-eivt@yandex.ru

Задачи математической физики в теории управляемых и оптимальных систем: системы с распределенными параметрами и запаздыванием.

Из анализа известной литературы нетрудно заключить, что классическая теория управляемых и оптимальных систем, линейных и нелинейных, в значительной мере базируется на методах обыкновенных дифференциальных уравнений, оснащенных в последнее время аппаратом функционального и нелинейного анализа, методах современной дифференциальной геометрии и топологии, а также численного анализа. Однако при всей глубине проработки названного аппарата еще остаются открытыми вопросы, требующие большего освещения. К ним, в частности, относятся вопросы из области теории систем с распределенными параметрами и систем с запаздыванием, т.е. к теории уравнений с частными производными – к уравнениям математической физики [1, 2] – и теории систем с дискретными и распределенными запаздываниями, которыми в ряде случаев можно аппроксимировать уравнения в частных производных.

С основами теории систем с распределенными параметрами можно ознакомиться, в частности, по работам А.Г. Бутковского [3, 4], а также по другим его статьям и книгам, освещающим вопросы подвижного оптимального управления и управления квантово-механическими системами. На практике, в силу сложности анализа, рассмотрение систем с распределенными параметрами часто основывается на простейших уравнениях математической физики, в качестве которых выступают волновое уравнение и уравнение теплопроводности [2], задаваемые в многомерном случае выражениями, соответственно

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \Delta u + f \text{ и } \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u + f \text{, где } u = u(x, t) \text{, а } \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}.$$

В одномерном случае $n = 1$, а оператор Лапласа $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$.

Важно подчеркнуть, что решение любого, а не только простейшего, уравнения математической физики в общем случае зависит не только от начальных, но и от граничных условий – условий, заданных на гиперповерхности области определения решения. Потребность в граничных условиях возникает, конечно, и в более просто решаемых классических задачах оптимального, а точнее, терминального управления; в задачах достижения заданной точки пространства / времени. При этом по библиографическому списку работ теория систем с распределенными параметрами (но не работ в области математической физики) заметно уступает не только классической теории управляемых и оптимальных систем, но и теории и практике применений систем с запаздыванием (систем с последействием). Становление и развитие этой последней области неразрывно связано с именами А.Д. Мышкиса, Л.Э. Эльсгольца, В.Б. Колмановского, Н.Н. Красовского, Дж. Хейла и др.

В переменных состояния уравнение простейшей системы с m дискретными запаздываниями в контуре обратной связи можно записать в виде

$$\dot{x}(t) = \mathbf{A}x(t) + \sum_{k=1}^{m} \mathbf{B}_k u_k(t) + v(t),\ u_k(t) = x(t - \tau_k) \text{, где векторные функции } x, u_k(t), v \in \Re^n.$$

Система же с распределенным запаздыванием записывается как

$$\dot{x}(t) = \mathbf{A}x(t) + \mathbf{B} \int_{t-T}^{t} x(t + \tau) dG_\tau(t, \tau) + v(t).$$

С аппаратом функционально-дифференциальных уравнений (аппаратом теории систем с распределенным запаздыванием) можно ознакомиться по работе [5], а с его применением – по работам [6-9]; в работе [5] рассматривается классификация функционально-дифференциальных уравнений; развивается абстрактный подход к рассмотрению различных классов уравнений, в частности, сингулярных и с импульсными воздействиями. Рассмотрение ведется с опорой на технику теории операторов. Так, оператор линейного уравнения обычно задается выражением $Lx(t) = \dot{x}(t) - \mathbf{A}x(t) - \mathbf{B}\int\limits_{t-T}^{t} x(t+\tau)dG_{\tau}(t,\tau)$. Аналогично, оператор нелинейного уравнения, представленного как $\dot{x}(t) = f\left(t,\, x(t),\, \int\limits_{t-T}^{t} x(t+\tau)dG_{\tau}(t,\tau)\right)$, имеет вид $Lx(t) = \dot{x}(t) - f\left(t,\, x(t),\, \int\limits_{t-T}^{t} x(t+\tau)dG_{\tau}(t,\tau)\right)$.

Решение последнего требует, как правило, обращения к численным методам, методам возмущения и т.п. Решение линейного уравнения в ряде простых случаев можно получить и в явной форме, что, однако, при наличии соответствующих вычислительных средств не всегда целесообразно. Пример решения такого уравнения, только представленного не в форме Коши, а в форме уравнения относительно искомой функции, дается в работе [10].

При всех своих возможностях моделирования физических, технических и социально-экономических процессов приходится признать, что теория функционально-дифференциальных систем в ряде случаев – это только средство аппроксимации наблюдаемых явлений. Так, например, представляется, что процесс распространения сигнала в длинной линии, описываемый уравнением $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, может быть аппроксимирован элементом чистого запаздывания. Но это возможно только при условии, что линия идеальна или совершенна. В противном случае оператор распространения описывается выражением в частных производных, и мы имеем дело с системой с распределенными параметрами (с системой, описываемой дифференциальными уравнениями в частных производных).

Теории и применению систем с дискретным и распределенным запаздыванием посвящено множество журнальных публикаций, статей в коллективных монографиях и книгах; естественно, что приводимая ниже библиография представлена в некотором смысле случайной выборкой источников информации по данной теме [5-12]. В части применения можно выделить работы [6-11]. Так, в [6] рассматриваются приложения теории к моделированию популяций, нейронным сетям и моделям экономики. В работах [7, 10, 11] теория прилагается к анализу лазерных систем с запаздыванием. Следует отметить, что в работах [6-9] дается и обзор теории систем с запаздыванием.

Теория систем с распределенными параметрами, ее приложения и ее связи с теорией систем с запаздыванием излагаются в работах [3, 4, 9]; в работах [9, 10] затрагиваются, конечно, и теория систем с запаздыванием. Приложения к задачам практики, как теории систем с запаздыванием, так и теории с распределенными параметрами, требуют привлечения методов приближенного или численного решения соответствующих уравнений, методов, берущих начало из работ [3, 4]; методов вычислительной математики, теории возмущений и функционального анализа. Применительно к системам с распределенными параметрами наиболее проработанными, по крайней мере, в теоретическом плане являются метод моментов и численные методы, в рамках которых определенный интерес представляет метод локальной аппроксимации [11].

Литература

1. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 2004.
2. Владимиров В.С. Что такое математическая физика? // Препринт. – М.: МИАН. 2006.

3. Бутковский А.Г. Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами. – М.: Наука, 1965.

4. Бутковский А.Г. Методы управления системами с распределенными параметрами. – М.: Наука, 1975.

5. Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф. Элементы современной теории функционально-дифференциальных уравнений. Методы и приложения. – М.: АНО ИКИ, 2002.

6. Stamova I. Stability analysis of impulsive functional differential equations. – Berlin New York: Walter de Bruited, 2009.

7. Atay F.M. (Ed). Complex time-delay systems. – Berlin: Springer, 2010.

8. Agarwal R.P. et al. Nonoscillation theory of functional differential equations with applications. – London New York: Taylor&Francis, 2002.

9. Loiseau J.J. et al. (Eds). Topics in time delay systems. – Berlin Heidelberg: Springer, 2009.

10. Ермолаев В.А., Кропотов Ю.А., Проскуряков Ю.А. Построение моделей систем обмена информацией с дискретным и распределенным запаздыванием и задержанной обратной связью // Компьютерная оптика, 2020, т.44(3), с. 454-467.

11. Ермолаев В.А., Кропотов Ю.А. Методы локального анализа и сглаживания временных рядов и дискретных сигналов // Математическое моделирование, 2017, т.29, №2, с.119-132.